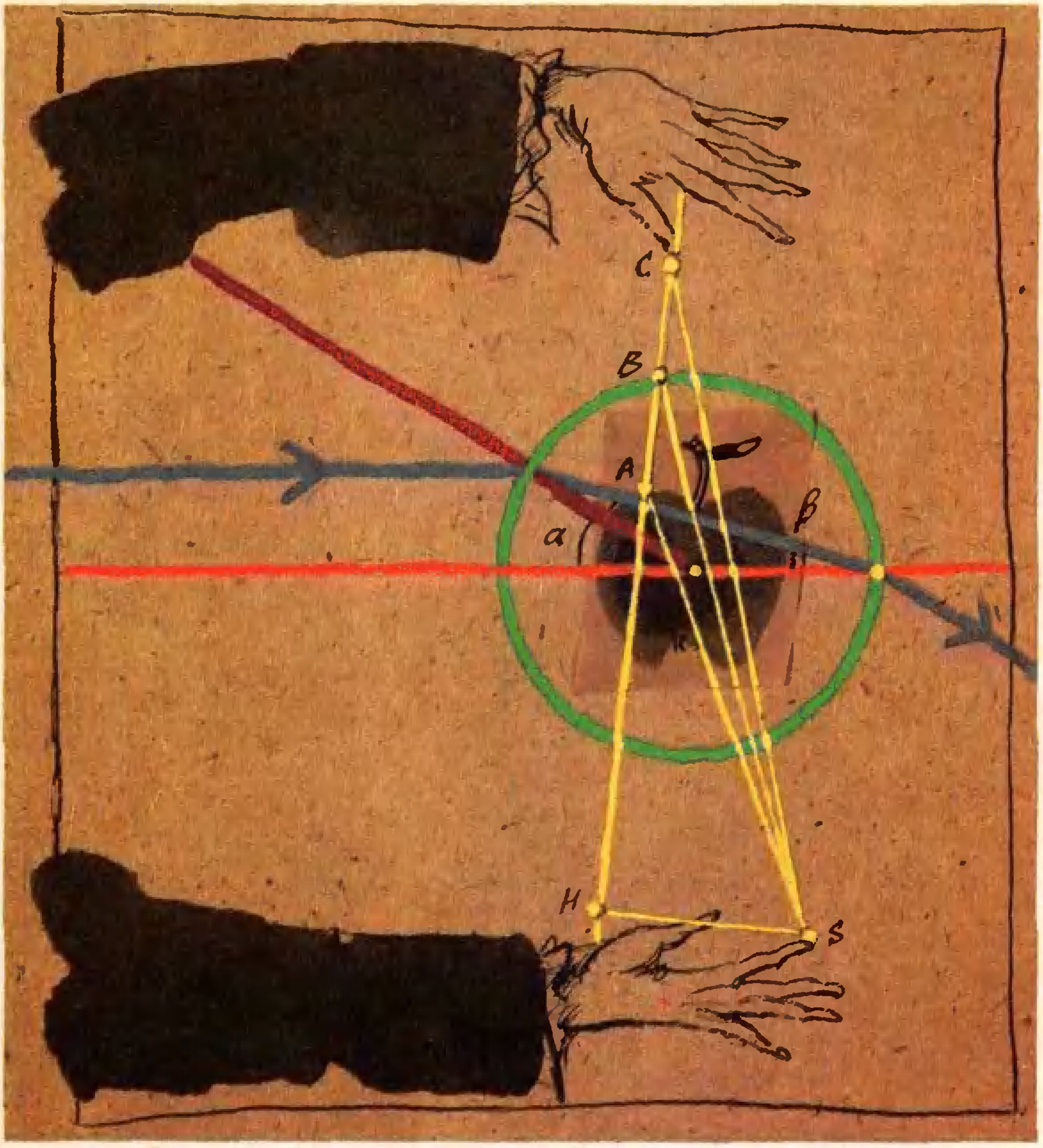
ISSN 0130-2221

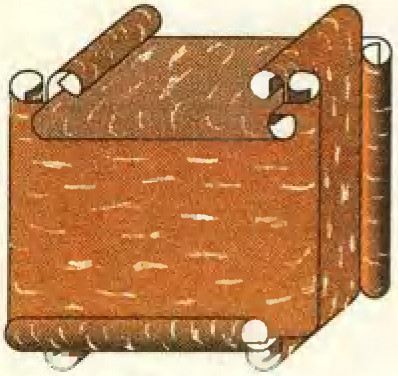
ИЮЛЬ/АВГУСТ 1994 · №4

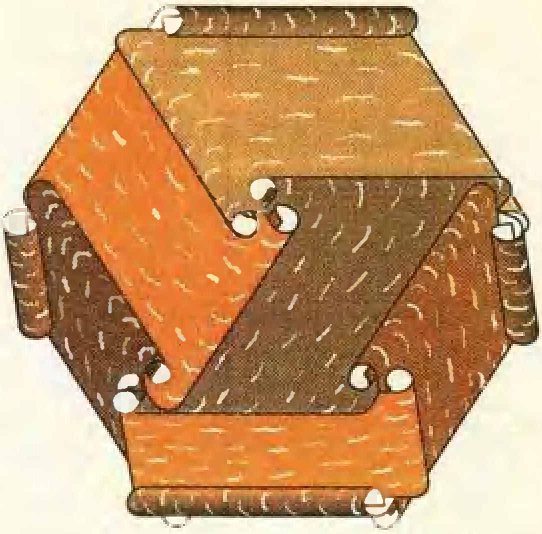
КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

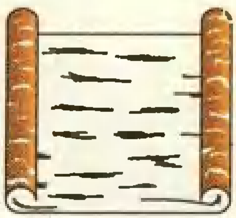


КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

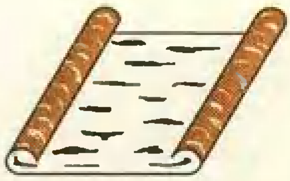




Элементы головоломок



6 шт



12 шт

Среди знатоков весьма высоко ценятся головоломки, составленные из одинаковых элементов. Как правило, они представляют собой симметричные многогранники, которые довольно легко разобрать на отдельные равные части. Привлекательность этих игрушек обнаруживается после того, как вы разберете их, а потом ...ытаетесь восстановить первоначальное состояние. ...е на вид, абсолютно одинаковые детали после ...казываются упрямо непослушными и никак ...руг с другом. То вы вдруг обнаруживаете ...о вам их не хватает.

Сегодня мы приводим примеры двух подобных головоломок: куба и ромбододекаэдра. Обе игрушки полые внутри и состоят соответственно из 6 и 12 одинакоеых элементов. Каждый элемент — это квадрат (или ромб), две протиеоположные стороны которого удлинены и загнуты. Элементы лучше делать из гибких материалов: жести или бересты.

Нам неизвестно, можно ли подобным образом сконструировать головоломки в форме других многогранников. Если вам это удастся, напишите нам о еаших достижениях.

материал подготовил А. Калинин

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

ИЮЛЬ/АВГУСТ · 1994 · №4

В номере:

Давайте вместе откроем закон всемирного тяготения

А. ГРОСБЕРГ

В школе проходят, что закон всемирного тяготения открыл Ньютон. И это — как и большая часть того, что проходят в школе, — правда. Но не совсем понятно, как он это сделал. В учебниках обычно вспоминают знаменитую фразу Ньютона: «Если я видел дальше других, то потому, что стоял на плечах гигантов», и объясняют, что среди гигантов должны быть прежде всего упомянуты Галилей и Кеплер, поскольку Ньютон исходил из открытых Кеплером трех законов обращения планет вокруг Солнца и из закона (принципа) инерции Галилея. Но вопрос все-таки остается: как, исходя из этих посылок, можно было найти знаменитую формулу

$$F = G\frac{mM}{R^2}?$$

Конечно, как абсолютный гений Ньютон до всего мог додуматься. Но, именно поскольку он был действительно гений, интересно проследить, каким мог бы быть конкретный ход его рассуждений. И мы можем сегодня его понять, поскольку можем и будем пользоваться хорошим и четким научным языком. А это как раз и есть тот фонарь, который позволяет простому смертному заглянуть туда, куда раньше только гений мог войти при свете своей мысли.

Среди прочего интересно понять также, какая математика нужна была Ньютону. Ведь известно, что он по ходу дела открыл и разработал дифференциальное и интегральное исчисления. Но как и для чего он эти идеи использовал? В школьном учебнике физики об этом естественно не говорится, а если взять учебник «потолще», то можно обнаружить вывод законов Кеплера из закона тяготения — но не наоборот!

Надо сказать, что с такой проблемой «наоборот» — задачей определения закона взаимодействия по данным наблюдений за движением, происходящим в результате этого взаимодействия, — Ньютон столкнулся первым из ученых, но не последним. Точнее будет сказать, что он первый так задачу поставил. Похожая проблема стояла перед Резерфордом, когда он по данным о рассеянии α-частиц на атомах золотой фольги должен был догадаться, что рассеяние происходит на самом деле на почти точечных центрах и подчиняется закону Кулона. И такая же проблема возникает в нынешней

Галилео Галилей (1564–1642)

физике элементарных частиц, где по данным рассеяния одних частиц на других нужно угадать закон взаимодействия, или, если угодно, характер поля. (Такая задача называется обратной задачей рассеяния, и в ее исследовании замечательный прогресс был достигнут совсем недавно, буквально в последние годы.) Так что Ньютон и его проблемы действительно не устаревают.

Итак, давайте попробуем проследить возможный путь мысли Ньютона. Начнем с того, что вспомним законы Кеплера —

1-й закон: орбита любой планеты — эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце;

2-й закон: радиус-вектор планеты в равные промежутки времени описывает равные площади;

3-й закон: квадраты периодов обращений двух планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит. (Заметим, что по современным данным отношение T^2/R^3 равно $k = (2{,}973 \pm 0{,}005)\cdot 10^{-19}$ с^2/м^3.)

Вспомним также принцип инерции Галилея — при отсутствии внешних воздействий (сил) тело сохраняет неизменным состояние своего движения (т.е. остается неизменной скорость тела как по величине, так и по направлению).

Спрашивается: что можно вывести логически из этих посылок и какие новые гипотезы пришлось

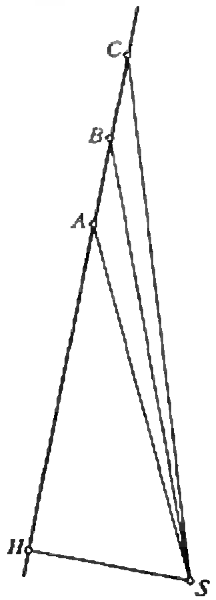


Рис. 1

ввести Ньютону? Первым шагом было сопоставление принципа инерции Галилея со вторым законом Кеплера. В самом деле, рассмотрим ситуацию, о которой говорится в принципе Галилея — никакая сила не действует. Сохраняется ли так называемая секторная скорость, т.е. скорость возрастания площади, описываемой радиусом-вектором движущейся точки? Да — в этом легко убедиться, глядя на рисунок 1. Условное Солнце (не создающее никакой силы) находится в точке S, точки A, B, C изображают положения условной планеты через равные промежутки времени Δt, скажем через 1 сутки. Сохранение секторной скорости означает равенство площадей секторов SAB и SBC. И они действительно одинаковы: поскольку в отсутствие силы сохраняется направление скорости, то отрезки AB и BC принадлежат одной прямой, следовательно, треугольники SAB и SBC имеют общую высоту SH, но основания их тоже равны, так как сохраняется и величина скорости, т.е. $AB=BC=v\Delta t$, откуда и вытекает равенство площадей.

А если сила действует и скорость меняется? Например, если бы сила действовала вдоль прямой AC, то скорость менялась бы по абсолютной величине, отрезки AB и BC были бы различны и секторная скорость бы не сохранялась. Ньютон догадался: из второго закона Кеплера вытекает, что сила действует в направлении прямой, соединяющей планету с Солнцем.

Ну вот, скажет читатель, тоже мне открытие: куда она, собственно, еще могла бы действовать? Да куда угодно! Представьте себе, что в наше время некто занят исследованием «планетной системы» вокруг Земли — он не знает, что это на самом деле искусственные спутники, и изучает их движение. Он может открыть, что некоторое возмущение какого-то поля, исходящее из центрального тела (Земли), т.е. то, что на самом деле является управляющим радиосигналом, вызывает силу, действующую на спутник в разных случаях по разным направлениям — иногда по касательной к орбите, иногда под углом и т.д. Это уже потом наш не очень грамотный исследователь откроет для себя, что на самом деле сила появляется и совершает работу за счет энергии, запасенной внутри спутника в виде химической энергии топлива, а возмущение электромагнитного поля играет роль только информационную, сигнальную. Но это потом, а пока что он может предположить все что угодно. И во времена Ньютона очень правдоподобно выглядело бы предположение, что вокруг планеты, махая крылышками, летают ангелы и равнодействующая их сил направлена...

Итак, Ньютон формулирует теорему: раз секторная скорость планеты сохраняется, значит, сила, действующая на планету, направлена по прямой к Солнцу. Для доказательства обратимся к рисунку 2. Планетная орбита на нем чрезмерно вытянута — так выглядят на самом деле орбиты не планет, а комет. Но, во-первых, кометы тоже подчиняются законам Кеплера, хотя Кеплер этого и не знал (а кометы не знают этого и по сей день), а во-вторых, «геометрия — это искусство правильно рассуждать на неправильно построенном чертеже» (А. Пуанкаре). Здесь же пунктиром воспроизведен и рисунок 1, но теперь планета из точки B двигалась не вдоль той же прямой в точку C, а под действием силы завернула и попала в точку D. При этом секторная скорость сохранилась, т.е. площадь треугольника SBD равна площади треугольника SAB, или, в силу сказанного раньше, площади треугольника SBC. Треугольники SBC и SBD имеют общую сторону SB, поэтому из равенства их площадей вытекает равенство соответствующих высот: $CK=DL$. Это, в свою очередь, означает, что линия CD параллельна прямой BS. А что, собственно, такое CD? Давайте решим этот вопрос с помощью векторов:

Иоганн Кеплер (1571–1630)

$$\vec{CD} = \vec{BD} - \vec{BC},$$
$$\vec{BC} = \vec{AB},$$
$$\vec{AB} = \vec{v}_{AB}\Delta t \text{ и } \vec{BD} = \vec{v}_{BD}\Delta t,$$

где $\vec{v}_{AB}$ и $\vec{v}_{BD}$ — средние скорости планеты на соответствующих участках траектории; следовательно,

$$\vec{CD} = \left(\vec{v}_{BD} - \vec{v}_{AB}\right)\Delta t,$$

т.е. вектор $\vec{CD}$ коллинеарен вектору изменения скорости. Отсюда вытекает, что вектор изменения скорости направлен вдоль прямой BS — как раз от планеты к Солнцу! А поскольку изменение скорости, согласно Галилею, вызывается силой, то разумно предположить, что сила направлена туда же, куда и изменение скорости, т.е. к Солнцу.

Подведем предварительные итоги. Мы доказали (вполне строго), что из равенства площадей треугольников SAB и SBD вытекает, что векторная разность средних скоростей планеты на участках AB и BD направлена вдоль BS, т.е. к Солнцу. Но в рассуждении имеются две слабости. Во-первых, утверждение о сохранении секторной скорости неизменной означает совпадение площадей *криволинейных* фигур SAB и SBD, ограниченных не прямолинейными отрезками AB и BD, а соответствующими дугами —

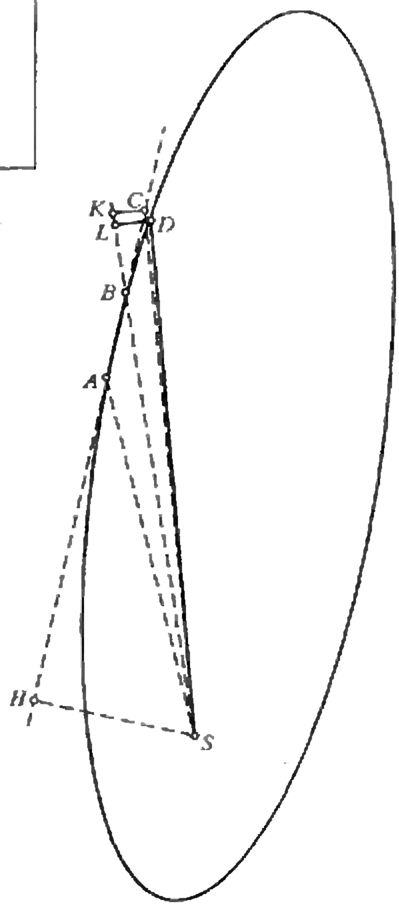


Рис. 2

участками эллиптической орбиты. Хотя совершенно очевидно, что соответствующая ошибка становится ничтожной, если мы рассматриваем достаточно маленький отрезок времени Δt, и, кроме того, Кеплер по данным наблюдения все равно не мог ничего сказать о точной площади криволинейных фигур и тоже заменял их обычными треугольниками, но все же для превращения теоремы в совсем строгую требуется чуть-чуть аккуратности с предельным переходом $\Delta t \to 0$. Это первое, но не главное место, для которого Ньютону потребовался новый математический аппарат.

Во-вторых, и это гораздо более важно, доказанная теорема касается изменения скорости, т.е., как мы теперь понимаем, ускорения, и потребовалась *физическая* гипотеза, что ускорение направлено вдоль линии действия силы. Таким образом, можно предположить, что шаг ко второму закону Ньютона был сделан одновременно с шагом к закону всемирного тяготения.

Надо сказать, что с современной точки зрения все это совсем просто: постоянство секторной скорости — это сохранение момента импульса, а сохраняется он только для случая центральной силы. Тот же закон сохранения объясняет, почему планетная орбита плоская (о чем Кеплер и Ньютон, насколько известно автору, не задумывались). Правда, он не объясняет, почему плоскости орбит разных планет почти совпадают — возможно, этот факт говорит нам что-то уже не просто о механике, а об истории возникновения Солнечной системы как о процессе, протекавшем так, что практически вся масса чего-то исходного (тумана? сгустка?...?) сосредоточилась в центре (Солнце), а момент импульса распределился по периферии. Но мы отвлеклись от темы.

Двигаемся дальше. Если сила направлена от планеты к Солнцу, то как она зависит от расстояния планета — Солнце? Естественно искать ответ на этот вопрос в третьем законе Кеплера, потому что именно он говорит о поведении планет на разных расстояниях от Солнца. Для этого, правда, нужно верить, что у всех планет закон изменения силы с расстоянием один и тот же. Быть может, это место было самым трудным. Впрочем, это уже область гадания. А рассуждать дальше можно так. Как мы знаем из принципа Галилея, чем больше действующая сила, тем сильнее меняется скорость тела, т.е. тем больше его ускорение. Подсчитаем же ускорение для планеты — то самое, которое теперь называется центростремительным ускорением.

Обозначим искомую силу, зависящую от расстояния R, через $F(R)$ и *допустим*, что она пропорциональна центростремительному ускорению $a = v^2/R = 4\pi^2 R/T^2$. Это естественное предположение, потому что мы знаем из принципа Галилея, что ускорение должно расти с ростом силы, и, кроме

Исаак Ньютон (1643—1727)

того, предположение о векторной коллинеарности силы и ускорения уже сделано — сказав «а», нужно сказать и «б». При таком допущении мы получаем

$$F(R) = m\frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

где m — пока просто какой-то коэффициент, и отсюда мгновенно находим простую формулу для периода обращения или лучше сразу для квадрата периода, поскольку именно эта величина входит в третий закон Кеплера:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 mR}{F(R)}.$$

Составляя теперь кеплерову комбинацию T^2/R^3, мы получаем, что величина $F(R)R^2/m$ должна быть одинаковой для всех планет. В частности, она не должна зависеть от R, откуда сразу следует, что зависимость силы от расстояния подчиняется закону обратных квадратов:

$$F(R) \sim \frac{1}{R^2}.$$

Снова подведем итоги. Мы уже продвинулись довольно далеко. Из второго закона Кеплера мы определили направление действия силы, а из третьего — зависимость величины силы от расстояния: если вспомнить одинаковую для всех планет постоянную Кеплера

$$k = T^2/R^3,$$

то получается

$$F = \frac{4\pi^2 Rm}{T^2} = \frac{4\pi^2 m}{kR^2}. \qquad (\bullet)$$

Как можно было проверить этот результат? Здесь Ньютон сделал шаг поразительной интеллектуальной смелости (правда теперь кажущийся совершенно естественным). Он предположил, что формула ($\bullet$) с равным успехом годится для описания притяжения не только планеты к Солнцу, но и Луны к Земле, только величина k может быть другой — обозначим ее $k_З$. Тогда, поскольку F/m есть ускорение (так было введено m), а движение Луны — вращательное с ускорением, равным $4\pi^2 R_Л/T_Л^2$, то получается просто снова третий закон Кеплера:

$$\frac{T_Л^2}{R_Л^3} = k_З,$$

но уже не для Солнечной системы, а для «Земной». Радиус орбиты Луны $R_Л$ и период ее обращения $T_Л$ — величины, которые Ньютон хорошо знал: $T_Л \approx 28$ суток, $R_Л \approx 3{,}8\cdot 10^8$ м. В результате получается $k_З \approx 9{,}87\cdot 10^{-14}$ с^2/м^3.

Ну и что? Другого-то спутника у Земли нет — только Луна, сравнить результат вроде бы не с чем. Вот тут-то и приходит черед знаменитого яблока из старого анекдота, согласно которому закон всемирного тяготения был открыт в саду, когда Ньютону на голову упало яблоко. Ньютон догадался, что обычное падение тел на Землю вызвано силой той же природы, что и тяготение планет к Солнцу, и поэтому ускорение свободного падения — всем современным школьникам известное $g = 9{,}8$ м/с^2 — должно быть равно отношению F/m из формулы ($\bullet$), но только в качестве R нужно взять расстояние от тела до центра Земли, т.е. попросту радиус Земли $R_З$. А эту величину измеряли еще греки, и Ньютон знал, что $R_З \approx 6400$ км. В итоге получается

$$g \approx \frac{4\pi^2}{k_З R_З^2} \approx 9{,}77 \text{ м/с}^2,$$

что прекрасно согласуется со значением 9,8 м/с^2.

Это первый момент торжества: стартовав от астрономических законов обращения планет и сделав всего два допущения, Ньютон вычислил величину g, измеренную совершенно независимо в земных условиях, — и получил правильный ответ. Такое вряд ли могло быть случайным совпадением. По-видимому, предположения Ньютона правильные. Напомним их еще раз. Первое: $\vec{F} = m\vec{a}$ — предположение, сделанное в два приема, сначала для направлений векторов и потом для их модулей; второе: сила одной и той же природы действует на планеты со стороны Солнца, на Луну со стороны Земли и, наконец, на яблоки и прочие земные предметы. Если первое можно, пожалуй, считать до некоторой степени естественным обобщением принципа Галилея, то второе иначе как гениальным прозрением не назовешь.

Что же было дальше? А дальше Ньютон догадался, что коэффициент m — это масса тела, потому что она определяет как раз меру инертности. Собственно, определения массы тогда не существовало, и Ньютон просто назвал коэффициент m этим словом. Потом он понял, что ситуация должна быть симметричной, и если сила тяготения пропорциональна массе одного из тел, то должна быть пропорциональна и массе второго, т.е. M. Все же остальные коэффициенты есть просто мировая постоянная G, так что получается всем известное соотношение

$$F = G\frac{mM}{R^2},$$

а также

$$k = 4\pi^2 GM$$

и

$$k_3 = 4\pi^2 GM_3.$$

Когда через сто с лишним лет после открытия Ньютоном закона всемирного тяготения Кавендишу удалось измерить гравитационное притяжение на опыте и получить тем самым значение G, то из этих формул он смог найти массы Солнца и Земли:

$$M_C = \frac{k}{4\pi^2 G} \quad \text{и} \quad M_3 = \frac{k_3}{4\pi^2 G}$$

— «взвесил» Солнце и Землю.

Но мы отвлеклись. По нашему рассказу получилось, что для открытия закона всемирного тяготения было достаточно знать второй и третий законы Кеплера (и то только для круговых орбит), а первый вроде бы и ни к чему. А сколько сил и сколько лет труда ушло у Кеплера на первый закон!

Эдмунд Галлей (1656—1742)

Только представьте себе, как он работал. В распоряжении Кеплера было несколько сотен чисел — данные астрономических измерений, преимущественно Тихо Браге, и задача состояла в том, чтобы угадать уравнение кривой по данным о координатах некоторого числа ее точек (тоже своего рода обратная задача). Кеплер брал какую-нибудь гипотезу о форме орбиты и, варьируя параметры (например, радиусы в случае круговых орбит), вычислял для каждого значения параметров соответствующие сотни ожидаемых значений результатов угловых измерений — и сравнивал их с имеющимися. Если не получалось, выбирал новое значение параметра и начинал вычисления с самого начала. Конечно, данные были, мягко говоря, не без погрешностей (они же были получены без телескопов!), так что Кеплер должен был почувствовать, какими отклонениями можно пренебречь, а какие необходимо принять во внимание.

Наибольшие хлопоты доставил Кеплеру Марс — на самом деле потому, что у него довольно вытянутая орбита, сильно отличающаяся от круговой. Кеплер представлял себе, что он сражается с самим Богом войны Марсом. Вот как он, например, описал момент, когда не сработала уже казавшаяся правильной гипотеза об эллиптической форме орбиты с Солнцем в центре эллипса (а не в фокусе!): «В то время, как я упивался триумфом, одержанным над движениями Марса, словно тот был уже окончательно побежден, заключен в темницу таблиц и сплетен путами уравнений, из разных мест стали приходить сообщения о том, что победа была лишь призрачной, и война разгорелась с новой силой. В стенах моего дома враг, которого я уже считал пленником, разорвал путы уравнений и взломал темницу таблиц... Снаружи шпионы, расставленные вдоль орбиты (я имею в виду истинные расстояния), одолели вызванные мной... войска физических причин, сбросили их гнет и вновь обрели свободу. Еще немного, и бежавший враг примкнул бы к восставшим, что привело бы меня в отчаяние. Не теряя ни минуты, я тайно выслал вперед подкрепление — полки новых физических причин, со всей поспешностью разведал, в каком направлении скрылся беглец, и стал преследовать его по пятам».

Неужели такой труд пропал даром? К счастью, это совсем не так. В самом деле, чтобы догадаться до формулы (*), было достаточно второго и третьего законов Кеплера. И была опора с другой стороны — связанная с вычислением g. Но она была слишком слабой для логического «моста», на который предполагалось водрузить тяжесть научной теории *всего мироздания* — а Ньютон претендовал именно на это. Было крайне важно найти какой-то способ проверки теории. Вот тут-то и пригодился первый закон Кеплера. Задача теперь ставилась так. Допустим, что сила подчиняется формуле (*). Какова тогда будет форма орбит? И Ньютон *доказал*, что орбиты будут эллиптическими (или гиперболическими для быстро летящих тел вроде некоторых комет) и что в третий закон Кеплера будут входить именно большие полуоси, а не какие-нибудь иные расстояния.

Вот это и был главный момент торжества. И он продолжался много-много лет:

— и когда комета Галлея, подчиняясь предсказаниям формулы (*), стала возвращаться в пределы видимости каждые 76 лет;

— и когда Адамс и Леверье открыли новую планету не глядя в телескопы, а с помощью вычислений, — и Нептун им подчинился, оказавшись точно в той точке неба и в то время, которое предсказала формула (*);

— и когда уже в нашем веке удалось в течение нескольких лет фотографировать положения системы двух близких звезд и увидеть замечательно правильную эллиптическую форму орбиты...

Если же говорить об истории, то, к сожалению, красивая легенда о великом ученом, скромно отдающим дань предшественникам, ставится специалистами под сомнение. Есть очень веские основания думать, что знаменитая фраза насчет гигантов была всего только грубой попыткой оскорбить Гука (который был маленького роста) в связи с тем, что уже после опубликования знаменитой книги Ньютона «Математические начала натуральной философии» и признания закона всемирного тяготения Гук напомнил, что он, хотя всего закона и не открыл, но некоторые правильные мысли в этом направлении высказывал. В частности, известно, что Ньютон не первым догадался до «закона обратных квадратов» — об этом действительно говорил Гук и некоторые другие. Тем не менее абсолютное и полное главенство Ньютона никакого сомнения не вызывает. Почему?

Во-первых, Ньютон первым доказал, что из закона обратных квадратов вытекает эллиптичность орбит. Только узнав о существовании такого доказательства, Галлей (открывший комету, носящую теперь его имя) сумел уговорить Ньютона опубликовать его результаты, пролежавшие до того без движения несколько десятилетий (!). Во-вторых, Ньютону принадлежит сама идея *всемирности* тяготения — идея о том, что тяготеют *все тела в мире*. В-третьих, и в главных, книга Ньютона была (и является) цельным сооружением, великолепным дворцом, где прекрасно и соразмерно все — общий подход («метод принципов»), широта взгляда (планеты — приливы — яблоки), философская глубина (взять хотя бы вопрос о массе, где Ньютон четко объяснил три аспекта этого понятия, связанные с количеством вещества, инертностью и гравитационным «зарядом»), математический аппарат. Словом, это действительно огромный и прекрасный дворец. А каждый отдельный кирпич, окно или колонна — очень важны, но ... это только детали. «Наука состоит из фактов, подобно тому, как здание — из кирпичей. Но простое собрание фактов похоже на науку не более, чем груда кирпичей на дом» (А. Пуанкаре). И конечно же, Ньютон, с его поразительной трудоспособностью и ни с чем не сравнимыми достижениями в науке, был подлинным украшением рода человеческого, как это написано на его могиле в Вестминстерском аббатстве в Лондоне. А если мы считаем, что споры о приоритете не украшают никого, и пытаться дразнить человека маленького роста, называя его гигантом, глупо даже в детском саду — то, видно, таково уж человечество, если украшающий его Ньютон себе это позволял...

Ну хорошо, а как же все-таки Ньютон вывел эллиптичность орбит из формулы (*)? Казалось бы, наконец, дошла очередь до настоящего применения нового математического аппарата. Но это — уже совсем другая история.

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

Сегодня «Квант» улыбается вместе с московским Физтехом и его газетой «За науку»

Собеседование?

Вопросы на собеседовании — это фирменный стиль Физтеха, выработанный годами. Скорее всего, вас спросят, почему вы решили поступать в этот институт, но могут спросить и такое:

— Назовите существенные (по Вашему мнению) отличия ученого от инженера.

— Как с помощью комнатного термометра измерить температуру дверной ручки?

— Почему у крокодила глаза плоские?

— Почему желудок сам себя не переваривает?

— Переведите этот вопрос на английский язык.

— Принесите, пожалуйста, из соседней аудитории ведро со ртутью...

Как и в суде, важно правильно ответить на вопрос о фамилии, имени и, если вспомните, о годе рождения. Но главное — создать впечатление, что вы — не обвиняемый, а декан — не прокурор. Удачно защитившись, переходите в контратаку:

— А, простите, как Вас зовут?

— А не могли бы Вы помедленнее задать свой вопрос, у меня создается впечатление, что уважаемая комиссия чего-то недопонимает?

— А не считаете ли Вы, что не сообщили мне самого главного — принят я или нет?

Если вас спрашивают, надо отвечать. Если же вы не знаете ответа на поставленный вопрос, сформулируйте свой и ответьте на него. Пусть комиссия поломает голову. Не теряйте чувства юмора: комиссия работает давно и ей просто хочется отдохнуть от серьезных вопросов. Так что если вам кажется, что товарищи шутят, ответьте в том же духе.

Иногда члены комиссии состязаются друг с другом в остроумии. Конечно, задавшему самый умный вопрос ничего, кроме морального удовлетворения, не будет, но состязание не прекращается. Бывает, что абитуриенту задают вопрос, на который сами члены комиссии ответа не знают, например:

— Как вчера сыграли Россия — Голландия?

— Кто сейчас летает на станции «Мир»?

— Какой сегодня курс доллара?


G
H
F
A
J
B

Проблема Лебега

М. КОВАЛЕВ

Я начинал подвизаться на математическом поприще с размышлений над несколькими известными геометрическими задачами, среди которых была одна проблема, восходящая к А.Лебегу. В геометрии немало подобных задач, — их прелесть заключается и в простоте и естественности постановки, и в надежде, основываясь на геометрической интуиции, найти достаточно простое решение. Может быть, эта статья не только познакомит читателей с интересной задачей, но и подтолкнет когда-либо к самостоятельному исследованию, к пробе своих сил.

Каждую плоскую фигуру $\mathcal{F}$, расстояние между любыми двумя точками которой не превосходит 1, назовем небольшой. Так, круг $C_{1/2}$ радиусом $\frac{1}{2}$ и равносторонний треугольник $\mathcal{F}_1$ со сторонами единичной длины — небольшие фигуры, а единичный квадрат $Q_1 = ABCD$ не является небольшой фигурой, поскольку $AC = \sqrt{2} > 1$ (рис.1). Ясно, что каждую небольшую фигуру $\mathcal{F}$ можно покрыть кругом C_1 единичного радиуса, если взять его центр в какой-то точке фигуры $\mathcal{F}$. *Покрышкой* (или *универсальной покрышкой*) назовем любую плоскую фигуру, которая при движении способна покрыть каждую из небольших фигур. Круг C_1 является покрышкой, но далеко не самой маленькой.

В 1914 году выдающийся французский аналитик Анри Лебег, беседуя с венгерским математиком Юлиусом Палом, поставил вопрос о разыскании наименьшей по площади покрышки. Этот вопрос до сих пор остается открытым и за прошедшее время стал проблемой.

Круг? Квадрат? Шестиугольник?

Поищем наименьшую покрышку. Перед нами стоит геометрическая задача на экстремум. Вспоминая изопериметрическую задачу[1], первым делом хочется проверить — не будет ли наименьшей покрышкой некоторый круг? Этот круг должен покрывать равносторонний треугольник $\mathcal{F}_1$. Наименьшим таким кругом является круг $C_{1/\sqrt{3}}$ радиусом $\frac{1}{\sqrt{3}}$, описанный вокруг треугольника $\mathcal{F}_1$. (Докажите это. Каков, кстати, наименьший круг, покрывающий тупоугольный треугольник?) Оказывается, круг $C_{1/\sqrt{3}}$ является покрышкой. Это было доказано английским математиком Г.У.Е. Юнгом еще в 1910 году.

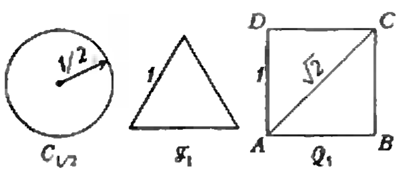


Рис. 1

Теорема. ***Наименьшей из всех кругов покрышкой является круг $C_{1/\sqrt{3}}$.***

Доказательство. Рассмотрим наименьшую из содержащих фигуру $\mathcal{F}$ окружностей. Фигура $\mathcal{F}$ непременно прилегает к этой окружности, ибо в противном случае окружность можно было бы уменьшить, не меняя ее центра O (рис. 2). Покажем, что среди точек прилегания фигуры $\mathcal{F}$ к окружности либо найдутся три, являющиеся вершинами остроугольного треугольника, либо две диаметрально противоположных. Действительно, допустим противное, т.е. что все точки прилегания фигуры $\mathcal{F}$ к окружности лежат на дуге AB, меньшей полуокружности (см. рис. 2). Тогда, если фигуру $\mathcal{F}$ чуть-чуть подвинуть в направлении MO, где M — середина дуги AB, то она перестанет прилегать к окружности. Чего, как мы видели, не может быть, если окружность наименьшая.

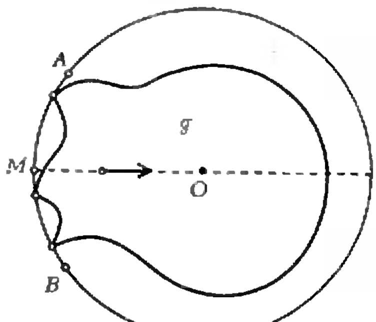


Рис. 2

Если фигура $\mathcal{F}$ прилегает к окружности в двух диаметрально противоположных точках, то радиус окружности R не превосходит $\frac{1}{2}$. Если же $\mathcal{F}$ прилегает к окружности в вершинах остроугольного треугольника ABD, то по теореме синусов

$$\frac{BD}{\sin A} = \frac{AB}{\sin D} = \frac{DA}{\sin B} = 2R.$$

Поскольку сумма углов треугольника равна $180° = 60°\cdot 3$, то хотя бы один из углов ΔABD не меньше $60°$. Пусть это будет угол A. Поскольку $60° \le A < 90°$, то

$$R = \frac{BD}{2\sin A} \le \frac{1}{2\sin 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

причем последнее неравенство обращается в равенство, когда ΔABC равен треугольнику $\mathcal{F}_1$. Теорема доказана.

Площадь круга $C_{1/\sqrt{3}}$ равна $\frac{\pi}{3} \approx 1{,}047$. Однако легко указать покрышку меньшей площади. Таковой является, например, единичный квадрат Q_1.

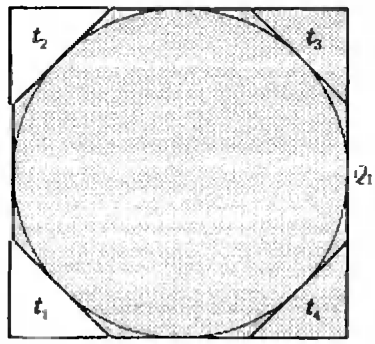


Рис. 3

Упражнение 1. Докажите, что квадрат Q_1 — наименьшая покрышка среди всех квадратов.

Покажем теперь, как можно из квадрата Q_1 получить еще меньшую покрышку. Впишем в квадрат $Q_1 = ABCD$ окружность единичного диаметра, и опишем вокруг этой окружности правильный восьмиугольник так, чтобы его стороны через одну лежали на сторонах квадрата (рис. 3). Восьмиугольник получается отрезанием от

[1] *О том, что из всех фигур с заданным периметром наибольшую площадь имеет круг.*

квадрата Q_1 четырех равнобедренных треугольников: t_1, t_2, t_3, t_4. Поскольку гипотенузы противоположных треугольников t_1 и t_3 параллельны и расстояние между ними равно 1, то каждая не лежащая на гипотенузе точка x одного из этих треугольников удалена от другого треугольника на расстояние больше 1. То же самое можно сказать и о паре противоположных треугольников t_2 и t_4. Пусть теперь небольшая фигура $\mathcal{F}$ покрыта квадратом Q_1. Тогда, если какая-либо точка фигуры $\mathcal{F}$ совместилась с точкой x одного из треугольников t_i ($1 \le i \le 4$), не лежащей на его гипотенузе, то фигура $\mathcal{F}$ не пересекается с противоположным к t_i треугольником. Поэтому фигура $\mathcal{F}$ может «заходить внутрь» не более чем двух соседних треугольников, прилегающих к одной и той же стороне квадрата. Таким образом, *любую небольшую фигуру можно покрыть* шестиугольником, полученным отрезанием от квадрата Q_1 двух соседних треугольников, например t_1 и t_2 на рисунке 3.

Упражнение 2. Вычислите площадь этого шестиугольника.

На самом деле, существует шестиугольная покрышка гораздо меньшей площади, чем мы нашли. Это правильный шестиугольник $\mathcal{G}$, вписанный в круг Юнга $C_{1/\sqrt{3}}$ (рис.4). Кстати, диаметр окружности, вписанной в $\mathcal{G}$, равен 1. Площадь этого шестиугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$.

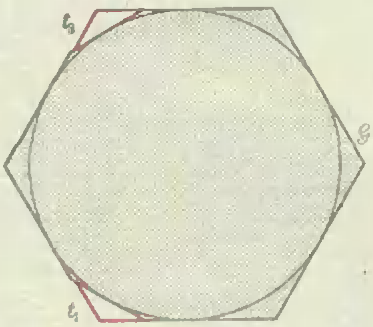


Рис. 4

Упражнение 3. Докажите, что не существует шестиугольной покрышки с площадью меньшей, чем у шестиугольника $\mathcal{G}$.

Задача 1. Попытайтесь доказать, что шестиугольник $\mathcal{G}$ – покрышка.[2]

Покрышка $\mathcal{G}$ была указана Ю.Палом в работе 1950 года. Но и из шестиугольника $\mathcal{G}$ можно вырезать еще меньшую покрышку, как это мы сделали с квадратом Q_1. Опишем вокруг окружности, вписанной в $\mathcal{G}$, правильный двенадцатиугольник (рис.4) так, чтобы его стороны через одну лежали на сторонах шестиугольника (он получается отрезанием от $\mathcal{G}$ шести треугольников t_i, $1 \le i \le 6$). Если от шестиугольника отрезать не все шесть треугольников, а только два, t_1 и t_3, то получившийся восьмиугольник O_8 еще будет покрышкой.

Упражнение 4. Докажите это.

Рекорды

Восьмиугольник O_8 был самой меньшей из найденных Палом покрышек, его площадь равна $2 - \frac{2}{\sqrt{3}} = 0{,}845299$. В 1936 г. немецкий математик Р.Шпраг уменьшил эту покрышку Пала. Покрышка Шпрага (рис.5) получается отрезанием от восьмиугольника $O_8 = ABCDEFGH$ двух криволинейных треугольников EIK и EJK, где IK и JK — дуги окружностей единичного радиуса с центрами в точках H и B соответственно. Площадь получившегося криволинейного десятиугольника $ABCDIKJFGH$ приблизительно 0,844144. Шпраг считал, что из его покрышки нельзя вырезать меньшую.

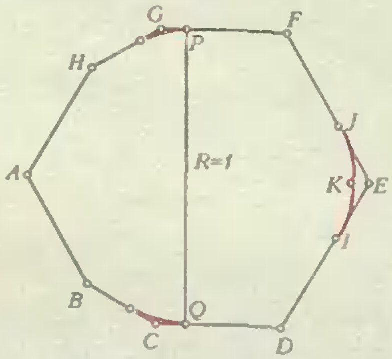


Рис. 5

Мы назовем покрышки, обладающие этим свойством, неуменьшаемыми. Наименьшая покрышка *неуменьшаема*, однако неуменьшаемая покрышка может и не быть наименьшей. На протяжении почти 40 лет покрышка Шпрага была самой малой из известных. Но в 1975 г. Х.Хансен все-таки «срезал» с нее два микроскопических кусочка общей площадью, по его подсчетам, порядка 10^{-19} квадратных единиц! Покрышка Хансена (рис.5) получается из покрышки Шпрага срезанием двух углов C и G, лежащих на сторонах правильного двенадцатиугольника, вписанного в восьмиугольник O_8, дугами окружностей единичного радиуса с центрами в точках P и Q на расстоянии $\approx 3{,}7 \cdot 10^{-7}$ от соответствующей вершины. Хансен предложил доказательство того, что полученный криволинейный выпуклый двенадцатиугольник, симметричный относительно оси AE, является неуменьшаемой покрышкой. Однако оно опирается на недоказанное и сомнительное допущение.

Отметим, что все авторы, начиная с Пала, искали не вообще наименьшую, а выпуклую покрышку (выпуклой называется фигура, содержащая вместе *с каждыми двум своими точками отрезок*, соединяющий их). Наименьшая из ныне известных покрышек построена в 1980 г. Г.Даффом. Площадь этой невыпуклой и не симметричной покрышки 0,84413570...

Вопросы. Вопросы...

Что же все-таки известно о наименьшей покрышке? Оказывается, очень мало.

Во-первых, это оценки ее площади. Об оценке сверху мы уже много говорили. Простейшую оценку снизу дает площадь круга единичного диаметра $\frac{\pi}{4} = 0{,}785\ldots$ Учитывая усовершенствованную нижнюю оценку Пала для площади $S_{\text{вып}}$ наименьшей выпуклой покрышки, можно записать неравенства:

$$0{,}825711\ldots = \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4} < S_{\text{вып}} < 0{,}8441144\ldots$$

Итак, мы знаем площадь наименьшей выпуклой покрышки с хорошей степенью точности: $S_{\text{вып}} = 0{,}8349 \pm 1{,}1\%$.

Во-вторых, у нас есть отрицательные результаты. Мы уже выяснили, что наименьшая покрышка — не круг и не шестиугольник. С нашими знаниями легко доказать, что она не может быть ни треугольником, ни четырехугольником, ни пятиугольником. Действительно, наименьшая покрышка содержит круг $C_{1/2}$ диаметром 1. А из всех n-угольников, содержащих круг $C_{1/2}$, наименьшую площадь имеет правильный n-угольник, описанный вокруг этого круга.

Задача 2. Попытайтесь доказать это (доказательство имеется, например, в упомянутой книге Д.Шклярского, Н.Ченцова и И.Яглома).

[2] *Если не получится, доказательство можно найти в книгах: Д.Шклярский, Н.Ченцов, И.Яглом «Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии» (М.: 1974) и В.Болтянский, И.Гохберг «Разбиение фигур на меньшие части» (М.: 1971).*

Теперь остается только убедиться, что площади правильных треугольника и пятиугольника, описанных вокруг круга $C_{\sqrt{2}}$, больше площади наименьшей покрышки. Для квадрата Q и шестиугольника $\mathcal{G}$ мы это уже проделали.

Задача 3. Докажите, что наименьшая покрышка не может быть ограничена эллипсом.

Создается впечатление, что ни одна из замечательных фигур элементарной геометрии не претендует на роль наименьшей покрышки. Перечислим некоторые нерешенные вопросы, возникающие из проблемы Лебега. Нам придется говорить о наименьшей покрышке во множественном числе, поскольку не решен

Вопрос 1. *Единственна ли наименьшая покрышка?*

Этот вопрос имеет смысл, если наименьшую по площади покрышку считать замкнутой, т.е. содержащей свою границу, и неуменьшаемой. Неуменьшаемость же покрышки следует понимать как отсутствие ее замкнутого подмножества, являющегося покрышкой. (Требование неуменьшаемости необходимо при рассмотрении невыпуклых покрышек, поскольку добавление к покрышке конечного числа точек или отрезков не меняет ее площадь.)

Вопрос 2. *Имеется ли среди наименьших покрышек многоугольник с конечным числом сторон?*

В-третьих... Вы еще не усомнились в самом существовании этой неуловимой наименьшей покрышки? Можете успокоиться! Высшая математика в *состоянии* доказать, что хотя бы одна наименьшая покрышка действительно существует. Вот, пожалуй, и все, что известно о ней. Итак, по всей видимости, нужно искать какую-то новую, не встречавшуюся доселе фигуру. Погадаем о том, какой она может быть. Все малые покрышки, о которых мы говорили, за исключением одной — покрышки Даффа, — являются выпуклыми.

Вопрос 3. *Есть ли среди наименьших покрышек выпуклая?*

Можно сузить вопрос и искать не произвольные наименьшие покрышки, а наименьшие выпуклые покрышки. Для них тоже не решен ни один из приводимых вопросов.

Задача 4. Докажите, что диаметр наименьшей выпуклой покрышки меньше 2. Можете ли вы улучшить эту оценку? (Диаметром замкнутой фигуры называется наибольшее из попарных расстояний между точками.)

Наступило время уточнить постановку самой проблемы Лебега. Вглядимся в определение: покрышкой называется фигура, которая *при движении* способна покрыть любую небольшую фигуру. Здесь есть неясность в том, какие движения покрышки мы считаем допустимыми. Вообразим покрышку вырезанной из картона. Дозволено ли нам ее снимать с плоскости и переворачивать, или нет? Математик бы сказал, что в первом случае мы допускаем движения с отражениями, а во втором — *только собственные* движения покрышки. Итак, мы должны различать два вида покрышек: 1) покрышки, которые можно переворачивать (отражать), назовем их о-покрышками, и 2) покрышки, допускающие лишь собственные движения в плоскости, для них мы сохраним прежнее название. Большинство из рассмотренных нами покрышек имело ось симметрии, поэтому для них было несущественно — допускаем ли мы отражения или нет. Исключением является покрышка Даффа.

Ясно, что всякая покрышка является и о-покрышкой, а наименьшая покрышка может быть и *больше наименьшей о-покрышки.*

Вопрос 4. *Существует ли наименьшая о-покрышка, не являющаяся покрышкой?*

С этим вопросом связан

Вопрос 5. *Имеется ли наименьшая покрышка (о-покрышка), обладающая осью симметрии?*

Если окажется, что наименьшая о-покрышка осесимметрична, то она же будет и наименьшей покрышкой. Конечно, и все предыдущие вопросы нужно ставить отдельно для покрышек и для о-покрышек.

Облегчим задачу

Один из способов нащупать подходы к решению сложной задачи, — попытаться поставить и решить похожие, но более простые задачи. Даже если эта разведка боем не приведет к конечной цели, можно рассчитывать на получение интересных результатов. Упрощая проблему Лебега, я рассмотрел задачу *нахождения наименьшей покрышки для всех небольших треугольников* и частично решил ее.

Сейчас этот результат будет описан. Наиболее удаленными друг от друга точками треугольника являются две его вершины (докажите). Поэтому *небольшие треугольники* — это треугольники со сторонами, по длине не превосходящими 1. Каждый такой треугольник можно уместить в равнобедренный треугольник t_γ с боковыми сторонами 1 и углом γ при вершине, $0° \le \gamma \le 60°$.

Упражнение 5. Докажите это.

Теорема. *Наименьшей выпуклой покрышкой и о-покрышкой для семейства* **T** *треугольников* t_γ *(а тем самым и для всех треугольников, диаметр которых не превышает 1) является несимметричный треугольник* $\Delta = ABC$ *с основанием* $AB = 1$, *углом* $B = 60°$ *и высотой* $CD = \cos 10°$ *(рис. 6). Фигура* Δ *является единственной (с точностью до отражения) наименьшей покрышкой. Ее площадь равна* $\frac{1}{2}\cos 10° = 0{,}4924\ldots$

Доказательство теоремы вполне элементарно.[3] Оно основывается на счастливой случайности. Дело в том, что уже для двух треугольников $t_{60°}$ и $t_{20°}$ из семейства **T** нельзя найти выпуклой покрышки с площадью меньшей, чем площадь треугольника Δ.

Задача 5. Докажите, что каждая о-покрышка для семейства **T** треугольников t_γ является покрышкой.

Задача 6. Докажите, что Δ — покрышка для семейства **T**.

Однако выпуклая покрышка Δ далеко не самая лучшая. Укажем невыпуклую покрышку меньшей площади.

[3] *Оно опубликовано в «Украинском геометрическом сборнике», № 26 за 1983 год.*

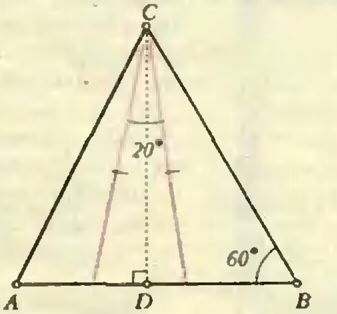


Рис. 6

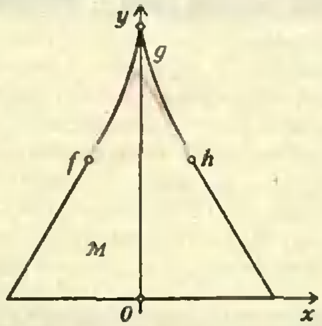


Рис. 7

Пусть xOy — прямоугольная система координат. Рассмотрим множество всех симметричных относительно оси Oy треугольников t_γ, $0° \le \gamma \le 60°$, основания которых лежат на оси Ox, а третья вершина — выше $y \ge 0$ (рис.7). Объединение всех треугольников — фигура $\mathcal{M}$ — очевидно, покрышка для семейства **T**. Криволинейная часть границы покрышки $\mathcal{M}$ — дуга fgh на рисунке 7 — представляет собой часть хорошо изученной линии — *астроиды* $x^{2/3}+y^{2/3}=1$. Точки f и h лежат на сторонах равностороннего треугольника. Нашу астроиду можно определить как границу фигуры, заметаемой единичным отрезком, концы которого свободно скользят по координатным осям. Вычислить площадь фигуры $\mathcal{M}$, наверное, проще всего, пользуясь кинематическими соображениями, однако без интегрирования не обойтись.

Вычисления дают

$$\frac{1}{16}\left(\pi+\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)=0{,}43992\ldots$$

Задача 7. Постройте, исходя из фигуры $\mathcal{M}$, неуменьшаемую покрышку $\mathcal{N}$ для семейства **T**. Можете ли вы указать покрышки с меньшей, чем у $\mathcal{N}$, площадью?

А.Лебег ставил также вопрос о нахождении покрышки наименьшего периметра (назовем ее p-наименьшей). Этот тоже нерешенный вопрос исследовался много меньше. Приведем только оценки периметра P p-наименьшей покрышки, установленные Палом:

$$3{,}302=\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}\le P<8-\frac{8}{\sqrt{3}}=3{,}382\ldots$$

В одном отношении вопрос о p-наименьшей покрышке проще — заведомо ясно, что эта покрышка выпукла. На рисунке 8 изображена покрышка

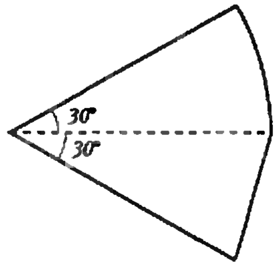


Рис. 8

$\mathcal{Я}$ для семейства треугольников **T**, являющаяся, по мнению автора, p-наименьшей покрышкой для этого семейства. $\mathcal{Я}$ — это сектор единичного круга с углом 60° и со срезанным с краю сегментом в 30°. Периметр $\mathcal{Я}$ равен $2+\frac{\pi}{6}+2\sin 15°=3{,}04123\ldots$

Задача 8. Докажите, что $\mathcal{Я}$ — неуменьшаемая покрышка для семейства **T**.

ИНФОРМАЦИЯ

КОМПЬЮТЕР И ГЕОМЕТРИЯ

Сегодня вычислительная техника дает возможность построить такую систему изучения геометрии, которая включала бы в качестве одного из ее элементов самостоятельный поиск учеником новых для него фундаментальных истин. Персональные компьютеры позволяют ученикам нащупать новое понятие, подметить закономерность, проверить гипотезу. Конечно же, для этого должны быть специальные сервисные программы.

Несколько лет назад в США фирмой «Key Curriculum Press» была создана компьютерная обучающая программа «The Geometer's Sketchpad». В настоящее время она широко распространилась по школам США и ряда других стран. Недавно в Московском институте новых технологий образования создана русская версия этой программы. Она получила название «Живая геометрия».

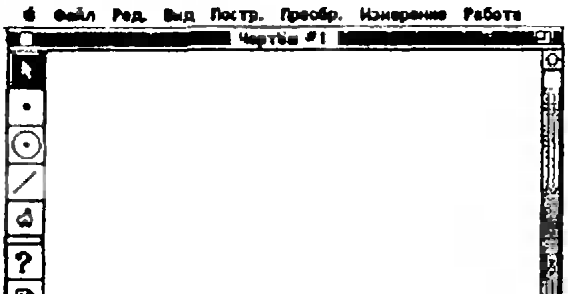


Рис. 1

Компьютер, снабженный этой программой, можно рассматривать как чертежный прибор, производящий все действия, выполнимые с помощью циркуля и линейки. Управление осуществляется с помощью набора кнопок, расположенных вокруг экранного поля — аналога классной доски (рис.1).

Простейшее действие в этой программе — установка точки на экране. После установки двух точек можно провести, по желанию, либо прямую через эти точки, либо луч этой прямой с концом в одной из них, либо отрезок с концами в этих точках. Кроме того можно провести окружность с центром в одной из установленных точек, проходящую через вторую точку. По трем точкам строится угол или треугольник. Не представляет трудности деление отрезка пополам, как и проведение биссектрисы угла или перпендикуляра к данной прямой через данную точку. Таким образом производится весь стандартный спектр геометрических построений, изучаемых в средней школе. По специальному требованию построенные объекты (точки и прямые) получают на экране буквенные обозначения (рис.2).

Специальная подпрограмма выдает числовые характеристики построенных объектов: длины отрезков, величины углов и дуг, площади многоугольников, которые можно вводить в специальные таблицы для запоминания и последующего анализа. Этим перечнем можно ограничить «статическую» часть программы «Живая геометрия».

Однако главное достоинство этой программы отражается во втором ее названии — «Динамическая геометрия». В

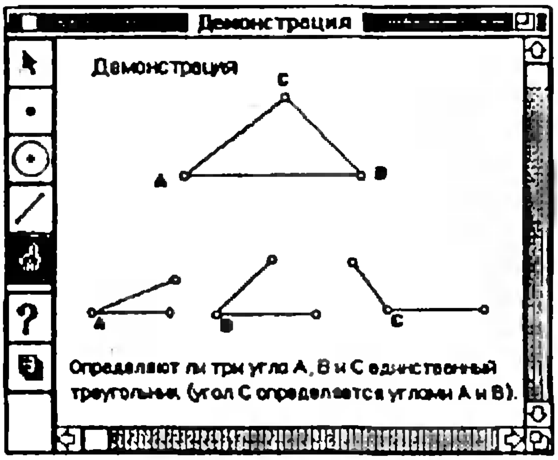


Рис. 2

чем же динамизм программы? Во-первых, пользователь может двигать по экрану построенные объекты: точки, прямые, окружности. При этом сохраняются установленные при построении связи. Например, если перемещать по экрану одну из вершин треугольника, в котором проведены биссектрисы углов, то будут двигаться и смежные с этой вершиной стороны, а также и биссектрисы, оставаясь биссектрисами уже новых углов. Совершая такие движения, пользователь может воочию убедиться, что биссектрисы (медианы, высоты) треугольника всегда пересекаются в одной точке, что площадь треугольника не меняется, если одну из вершин передвигать параллельно противоположной стороне, и т.д., т.е. выявлять закономерности, высказывая и проверяя гипотезы.

«Динамические» способности программы «Живая геометрия» не ограничиваются возможностью таких перемещений. В ее арсенале — преобразования симметрии, гомотетии, вращения на заданный угол. Можно создать композицию таких преобразований: скользящую симметрию, поворотную гомотетию и другие, получить на экране образы заданного преобразования (рис.3) с окраской каждого следующего образа в новый цвет или новый оттенок заданного цвета.

И это не все. Можно оживить изображение, заставив двигаться некоторые точки по прямым или окружностям

Рис. 3

с заданными скоростями, при этом и все связанные с ними объекты приходят в движение так же, как и при передвижении точек пользователем. Получается настоящий мультфильм.

Перечисляя динамические возможности программы, нельзя пропустить ее способность выполнять рекурсивные построения, в результате которых можно получать различные фрактальные кривые, такие, как «кривая Кох» (рис.4).

Все построения, совершаемые пользователем, могут быть занесены в память с тем, чтобы простым нажатием клавиши они вновь могли быть воспроизведены шаг за шагом. Это дает возможность для учителя заранее готовить сценарии построений для демонстрации их на уроке. Такая возможность породила и значительное число (около 100) разработанных сценариев с комментариями для учителя. Число таких сценариев постоянно увеличивается. В США образован специальный центр, в котором собираются и обрабатываются новые сценарии.

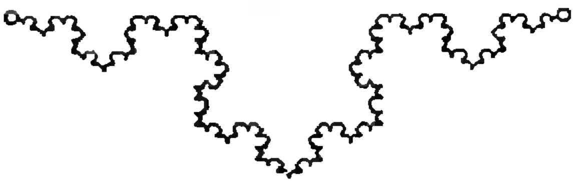


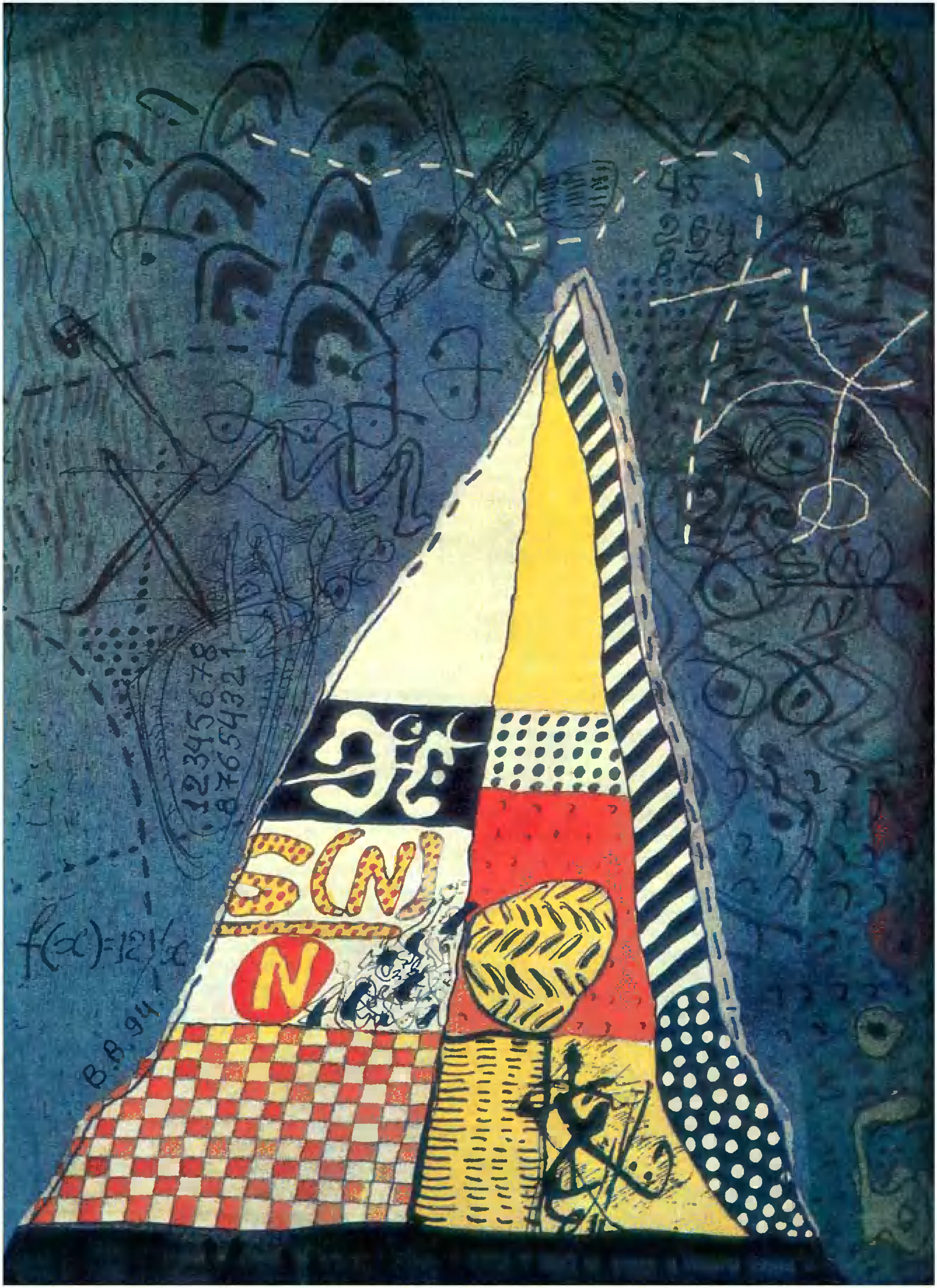
Рис. 4

Возможности «The Geometer's Sketchpad» привели к созданию нового школьного курса геометрии, основанного на визуальном восприятии геометрических понятий. Был создан и соответствующий учебник. В этом курсе вместо строгих доказательств теорем предлагается проверка их утверждений на примерах.

Такая концепция преподавания геометрии довольно спорна, она противоречит принятому везде дедуктивно-аксиоматическому методу, который формирует также навыки формально-логического рассуждения. Думаем, что не стоит (по крайней мере в ближайшее время) менять стиль преподавания, переводя его на эмпирическую основу, но обогатить преподавание геометрии новыми возможностями отнюдь не помешало бы. Тем более, что восприятие геометрии школьниками довольно формально, что показывают результаты вступительных экзаменов в вузы и математические олимпиады. Свободная игра с геометрическими объектами, которую предоставляет «Живая геометрия», дает возможность ближе знакомиться с законами геометрии, открывать их самостоятельно.

Желающие получить более детальную информацию о программе «Живая геометрия» могут обращаться непосредственно в Московский институт новых технологий образования (109004 Москва, ул.Нижняя Радищевская, д.10, тел. 915-62-96 и 915-60-50).

Н.Розов, А.Савин


N
B.B. 94

Сколько у числа делителей?

Б. КОТЛЯР

> *Пробороненные просторы*
> *Так гладко улеглись вдали,*
> *Как будто выровняли горы*
> *Или равнину подмели.*
>
> Б. Пастернак

Простое ли число — единица?

Задумывались ли вы когда-нибудь, почему единицу не принято считать простым числом? Ведь, как и у всякого простого числа, ее делители — она сама и единица, не так ли?

Разумеется, на то были причины — не менее веские, чем те, по которым принято считать параллельными совпадающие прямые. Если исключить их из числа параллельных, приходится во множестве формулировок геометрических фактов рассматривать возможность совпадения двух прямых отдельно, хотя теоремы и аксиомы без изъятий распространяются на этот случай.

Единица, долго причислявшаяся к простым числам, лишилась этого звания из сугубо практических соображений. Очень удобно было бы, чтобы разложение *всякого* натурального числа на простые множители было единственным. Но если считать, что число 1 простое, справедливость этого утверждения нарушается.

Разложим для примера на простые множители какое-нибудь число, скажем, 84:

$$84 = 2\cdot2\cdot3\cdot7 = 2^2\cdot3\cdot7.$$

Можно ли разложить его как-то иначе? Разумеется, можно переставлять сомножители местами, но такие разложения естественно считать совпадающими. То, что других разложений нет, вытекает из так называемой «основной теоремы арифметики», утверждающей, что *любое натуральное число разлагается на простые множители, причем (с точностью до перестановки) единственным образом*, т.е. натуральное число N однозначно представляется в виде

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

где $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — натуральные числа.

Вернемся к нашему примеру. Число 2 входит в разложение числа 84 во второй степени, 3 и 7 — в первой. А в какой степени входит в разложение этого числа простой множитель 5? Ни в какой, т.е. в нулевой. Так что можно считать, что в разложении содержатся все простые числа, но некоторые — в нулевой степени. Конечно, мы будем в дальнейшем выписывать только те сомножители, которые входят в разложение «по-настоящему».

Теперь понятно, почему неудобно считать 1 простым числом. Ведь ее можно приписать к разложению множителем в любой степени:

$$84 = 1^5\cdot2^2\cdot3\cdot7 = 1^{100}\cdot2^2\cdot3\cdot7$$

и т.д. Тем самым единственность разложения на простые множители оказалась потерянной.

Есть еще ряд причин — и простых, и довольно хитрых — в пользу того, чтобы единицу простым числом не считать. Напишем подряд несколько первых натуральных чисел, а под ними — число их делителей (учитывая только различные делители каждого числа). Для числа N число его делителей обозначим $\tau(N)$. Из получившейся таблицы видно, что у единицы лишь один делитель; у всех остальных натуральных чисел их больше (причем у простых — ровно по два). Поэтому желательно выделить ее в отдельный класс чисел — и не простых, и не составных.

Число делителей натурального числа

Можно ли записать функцию $\tau(N)$ аналитически? Оказывается, можно, и даже не очень сложно. Давайте посмотрим, как это делается.

Будем записывать натуральное число N в виде произведения тех простых, которые в ненулевой степени входят в разложение этого числа. Рассмотрим, как и раньше, равенство

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

с различными простыми $p_1, p_2, \ldots, p_k$ и натуральными показателями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. (Такое представление называется *каноническим разложением* числа N.)

Теорема. *Если*

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} -$$

каноническое разложение натурального числа N, то

$$\tau(N) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1).$$

Доказательство. Любой положительный делитель числа N имеет вид $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}$, где $0 \le \beta_1 \le \alpha_1$, $0 \le \beta_2 \le \alpha_2, \ldots, 0 \le \beta_k \le \alpha_k$. Например, если все $\beta_i = 0$, то делитель равен 1, если все $\beta_i = \alpha_i$, то делитель равен N. Сколько же таких делителей можно образовать? Показатель β_1 принимает ровно $\alpha_1 + 1$ значений — $0, 1, 2, \ldots, \alpha_1$; β_2 принимает $\alpha_2 + 1$ значений и т.д. Поэтому различных делителей вида $p_1^{\beta_1}$ будет α_1+1, делителей вида $p_2^{\beta_2}$ будет α_2+1; следовательно, делителей вида $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}$ будет ровно $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)$. Продолжая этот процесс дальше, получим требуемый результат.

Пользуясь этой формулой, можно найти число делителей любого натурального числа, но сначала придется разложить это число на множители, чтобы узнать показатели $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. А это не всегда просто сделать: ведь для очень большого числа трудно понять, простое оно или составное, тем более — написать его каноническое разложение.

Это не единственный недостаток приведенной формулы. Поведение функции $\tau(N)$ хаотично: с одной стороны, для каждого простого числа

Таблица

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tau(N)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6

$\tau(p)=2$, и простых чисел бесконечно много, т.е. как угодно далеко во второй строке нашей таблицы будут попадаться двойки; с другой стороны, ясно, что для некоторых N число делителей может быть сколь угодно большим — чтобы добиться этого, нужно лишь взять число, в каноническом разложении которого показатели $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ достаточно велики. На рисунке 1 изображен график функции $\tau(N)$, точки для наглядности соединены отрезками. Видите, какие получаются «горы и ущелья?»

От точной формулы толку мало — слишком уж нерегулярна наша функция. Нет ли более наглядной, пусть приблизительной, формулы, которая сразу бы показывала, чего ожидать от $\tau(N)$?

Посмотрим, как ведет себя $\tau(N)$ «в среднем». Возьмем среднее арифметическое числа делителей первых N натуральных чисел и обозначим его через $\tau_{ср}(N)$:

$$\tau_{ср}(N)=\frac{1}{N}\left(\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(N)\right).$$

Оказывается, для такой функции есть хорошая формула. Она не абсолютно точна, зато выражает «среднее число делителей» через хорошо известную функцию:

$$\tau_{ср}(N)=\ln N.$$

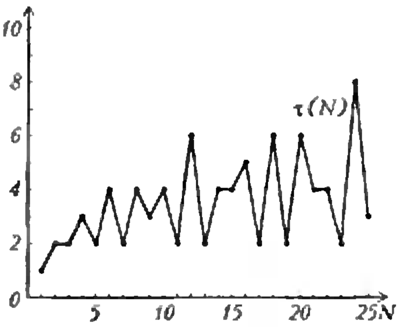


Рис. 1

Причем здесь логарифм?

Откуда взялся логарифм? На первый взгляд его появление выглядит довольно странно. Но на самом деле ничего удивительного здесь нет. Например, для $N=2^n$

$$\tau(N)=\tau(2^n)=n+1=\log_2 N+1=$$
$$=\log_2 N+\log_2 2=\log_2(2N).$$

Конечно, пример не очень показательный, поскольку такое натуральное число — степень простого — явление редкое, да и логарифм получился не натуральный, а по основанию 2.

Мы докажем справедливость предложенной формулы чуть ниже, но сначала немного уточним ее. Что означает здесь приближенное равенство? Существует число μ, приблизительно равное 0,154, такое что

$$\tau_{ср}(N)=\ln N+\mu+a_N,$$

причем a_N — бесконечно малая последовательность, т.е. при стремлении N к бесконечности ее предел равен нулю. При больших номерах N число a_N становится сколь угодно малым, и им можно пренебречь по сравнению с постоянным числом μ и уж тем более по сравнению с растущей функцией $\ln N$. Вот в чем смысл приближенного равенства $\tau(N)\approx\ln N$.

Среднее число делителей

Сначала научимся «видеть» делители натурального числа. Например, выпишем все делители числа 12:

1, 2, 3, 4, 6, 12.

Рассмотрим функцию $f(x)=12/x$. Ее график — всем известная гипербола. Нам понадобится только одна ее ветвь — та, что расположена в первом квадранте. Построим график: вычислим значения функции для заданных значений аргумента x: при $x=1, 2, 3,\ldots$ получим $y=12, 6, 4,\ldots$ Удобно вычислять y для значений x, совпадающих с делителями числа 12. Полученные точки с целочисленными координатами отметим на координатной плоскости и соединим их кривой (рис.2).

Посмотрим теперь, сколько точек с целочисленными координатами (их называют «целыми точками»; на рисунке 3 отмечены все целые точки в окрестности начала координат) попали на построенную нами ветвь гиперболы. Их ровно 6 — столько же, сколько делителей у числа 12. Ведь каждому натуральному делителю x соответствует натуральное число y такое, что $xy=12$.

На рисунке 4 вместе с ветвью гиперболы $y=12/x$ изображена ветвь гиперболы $y=6/x$; на ней столько целых точек, сколько делителей у числа 6. Но ведь каждая целая точка в первом квадранте под ветвью гиперболы $y=12/x$, не считая точек, лежащих на координатных осях, лежит на какой-то гиперболе $y=n/x$, причем $n<12$. Например, через точку (1, 11) проходит гипербола $y=11/x$, а через точку (2, 2) — гипербола $y=4/x$.

Выходит, число делителей у всех натуральных чисел, меньших либо равных 12, — это число целых точек, лежащих в первом квадранте под гиперболой $y=12/x$ и на самой этой гиперболе (не считая точек, лежащих на координатных осях). Оно равно

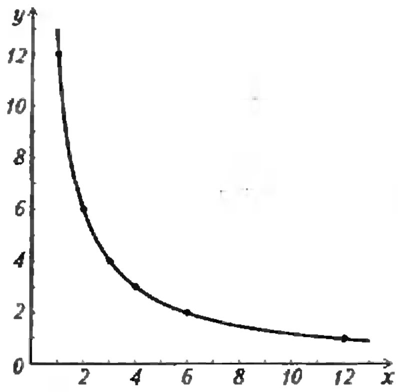


Рис. 2

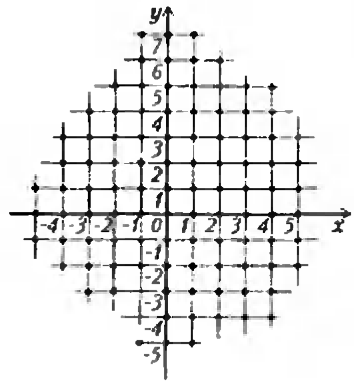


Рис. 3

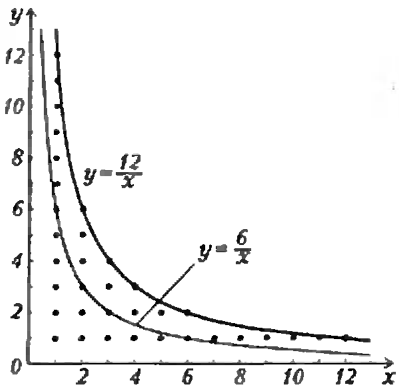


Рис. 4

$$S(12)=\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(12).$$

Аналогично, для произвольного натурального числа N

$$S(N)=\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(N).$$

— рассуждение ничем не отличается от уже приведенного. Отсюда

$$\tau_{ср}(N)=\frac{1}{N}\big(\tau(1)+\ldots+\tau(N)\big)=\frac{S(N)}{N}.$$

Итак, задачу арифметическую — найти сумму числа делителей — мы заменили задачей геометрической — найти число целых точек в первом квадранте под гиперболой $y=N/x$ (рис.5).

Точно решить эту задачу трудно, а приближенно мы ее сейчас решим. Построим на каждой целой точке, лежащей на гиперболе и под ней, единичный квадрат с вершинами в целых точках так, чтобы эта точка была «левым нижним» углом квадрата. На рисунке 6 такое построение сделано для $N=6$. Ясно, что число целых точек равно площади фигуры, составленной из единичных квадратов, а площадь этой фигуры приближенно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху гиперболой. Ее же легко найти интегрированием.

Проведем теперь намеченный план доказательства.

Пусть $S_1(N)$ — площадь криволинейной трапеции T_1, ограниченной линиями $y=0$, $x=1$, $x=N$ и $y=N/x$ (рис. 7); $S_2(N)$ — площадь фигуры T_2, ограниченной линиями $y=1$, $x=1$, $x=N$, $y=N/x$. Ясно, во-первых, что «лишняя» площадь прямоугольника равна $S_1(N)-S_2(N)=N-1$. Во-вторых, часть квадратов на рисунке 6 выходит за пределы криволинейной трапеции T_1. Все они порождены точками целочисленной решетки, лежащими вблизи гиперболы — под ней или на ней.

Сделаем условный рисунок (рис.8). Пройдемся по этим точкам «сверху вниз направо». Идя вниз, отмечаем целые точки, а перед поворотом направо — выкалываем; идя направо, выкалываем целые точки, а перед поворотом вниз — отмечаем. Так выделим все целые точки под гиперболой и на ней, дающие выступающие квадраты. «Настоящих» точек получилось ровно N штук — чтобы убедиться в этом, достаточно спроектировать их на ось Oy; «пустых» же — ровно $N-1$ (спроектируем их на ось Ox). Значит, всего выступает за пределы фигуры ровно $N+(N-1)=2N-1$ квадратов (при $N=6$ их 11). Но у некоторых квадратов выступает лишь часть. Итак,

$$0<S(N)-S_2(N)\le 2N-1.$$

Подставим сюда значение $S_2(N)=S_1(N)-N+1$. Получим

$$0<S_N-S_1(N)+N-1\le 2N-1.$$

Преобразуем это неравенство, прибавив ко всем его частям $-N+1$; получим

$$-N+1<S(N)-S_1(N)\le N.$$

Отсюда следует, что

$$\left|S(N)-S_1(N)\right|\le N.$$

Но ясно, что

$$S_1(N)=\int_1^N\frac{N}{x}dx=N\ln x\Big|_1^N=N\ln N.$$

Значит,

$$\left|S(N)-N\ln N\right|\le N.$$

Разделив обе части последнего неравенства на N, получим

$$\left|\frac{S(N)}{N}-\ln N\right|\le 1,$$

или

$$\left|\tau_{ср}(N)-\ln N\right|\le 1.$$

Но ведь функция $\ln N$ растет неограниченно вместе с N. Следовательно, растет и $\tau_{ср}(N)$. Разность же между ними остается ограниченной, она не больше 1. В этом смысл приближенного равенства $\tau_{ср}(N)=\ln N$.

Вычислим значения функций $\tau(N)$, $\tau_{ср}(N)$ и $\ln N$ для небольших значений N и построим их графики в одной системе координат (рис.9). Видно, что с помощью функций $\tau_{ср}(N)$ и $\ln N$ оказалось возможным сгладить функцию $\tau(N)$, — нам удалось «выровнять горы и подмести равнину».

Теорема Дирихле и проблема делителей

Последнее приближенное равенство можно уточнить. В XIX веке выдающийся немецкий математик Петер Густав Лежен Дирихле (1805 — 1859)

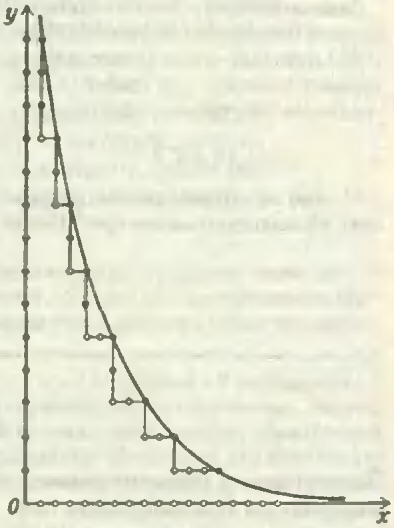


Рис. 8

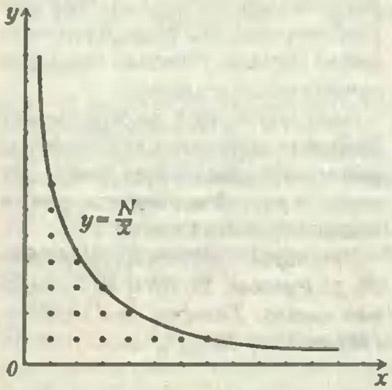


Рис. 5

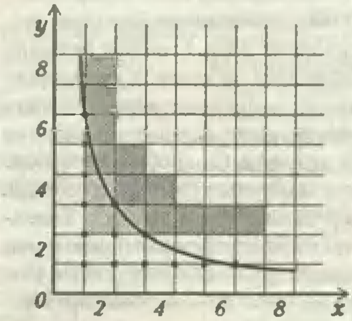


Рис. 6

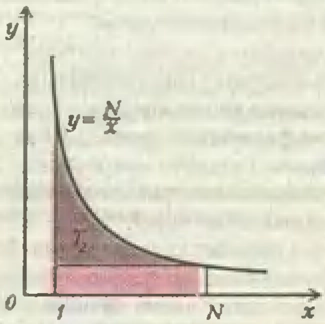


Рис. 7

придумал рассмотренный нами геометрический подход и доказал, что

$$\tau_{ср}(N) = \ln N + (2C - 1) + a_N .$$

В этом равенстве C — так называемая *постоянная Эйлера*, определяемая как предел

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right).$$

То, что этот предел существует, доказать достаточно просто. Приблизительно постоянная C равна 0,577. Последовательность a_N — бесконечно малая. Дирихле показал, что она достаточно быстро убывает к 0, — для некоторой постоянной A выполняется неравенство

$$|a_N| \le \frac{A}{\sqrt{N}} = AN^{-\frac{1}{2}}.$$

В своем доказательстве Дирихле остроумно использовал симметрию гиперболы относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Замечательный русский математик Георгий Федосеевич Вороной (1868 — 1908) показал, что на самом деле a_N убывает быстрее: для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$

$$|a_N| \le AN^{-\frac{2}{3}+\varepsilon}.$$

Можно ли справа написать функцию, убывающую еще быстрее? Какой

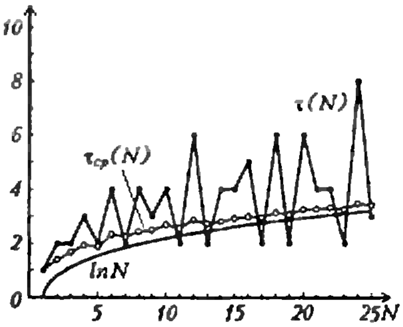


Рис. 9

показатель является предельным? В этом содержание знаменитой пока не решенной задачи — «проблемы делителей». Сейчас известны теоремы, в которых показатель у N меньше, чем в оценке Вороного, но окончательный результат неизвестен. Впрочем, сильно уменьшить функцию справа нельзя — английский математик Харди (1877 — 1947) доказал, что уже при показателе степени, равном $-3/4$, неравенство не выполняется. Гипотеза, пока не доказанная и не опровергнутая, состоит в том, что для любого $\varepsilon > 0$

$$|a_N| \le AN^{-\frac{3}{4}+\varepsilon},$$

т.е. она утверждает, что стоит чуть-чуть увеличить показатель, который, по Харди, недопустим, — и последовательность a_N убывает уже быстрее.

Проблема делителей — одна из интереснейших задач теории чисел. И еще раз подивимся чуду — число делителей натурального числа, тоже, конечно, натуральное, оказалось связанным с гиперболой, целыми точками на плоскости, площадями, интегралами и натуральными логарифмами!..

Упражнения

1. Докажите, что число делителей натурального N нечетно тогда и только тогда, когда N — полный квадрат.

2. Функция f на целых числах называется *мультипликативной*, если $f(ab)=f(a)f(b)$ для любых взаимно простых a и b. Докажите, что $\tau(n)$ — мультипликативная функция.

3. Пусть N — натуральное. Докажите, что число целых точек в области $x>0$, $y>0$, $xy \le n$ равно $2\sum_{1\le n\le\sqrt{N}}\left[\frac{N}{n}\right]-\left[\sqrt{N}\right]^2$.

4. Пусть (при $m \ge 1$) $\tau_m(n)$ обозначает число решений неопределенного уравнения $x_1x_2\ldots x_m = n$ в натуральных числах; в частности, очевидно, $\tau_1(n)=1$, $\tau_2(n)=\tau(n)$. Попробуйте сначала для $m=3$, а затем и для произвольного m доказать утверждения:

а) $\tau_m(n)$ — мультипликативная функция;

б) $\tau_m(p^\alpha) = \dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(m-1)}$;

в) число решений неравенства $x_1x_2\ldots x_m \le N$ в целых положительных $x_1x_2\ldots x_m$ равно $\sum_{n\le N}\tau_m(n)$.

ИНФОРМАЦИЯ

ЗАОЧНАЯ ШКОЛА ПРИ ВКИ НГУ

Заочная школа Высшего колледжа информатики Новосибирского государственного университета (ВКИ НГУ) действует в рамках программы «Молодые информатики Сибири». В настоящее время обучение в Заочной школе проводится по курсам:

— разработка первых программ с использованием «Turbo Pascal 6.0»,

— введение в компьютерное моделирование физических процессов и явлений,

— механика и электричество (расширенный школьный курс).

Школа работает круглогодично. В школу принимаются учащиеся общеобразовательных школ, начиная с 6 класса. Каждый учащийся сам выбирает удобный ему темп обучения. Учебные материалы рассылаются выпусками, состоящими из нескольких заданий.

Организация обучения в школе (подготовка и размножение выпусков, проверка работ и т.п.) требует больших финансовых расходов. Учащиеся оплачивают только половину стоимости обучения, остальные расходы берет на себя колледж (подробнее о размере платы за обучение Вам будет сообщено после зачисления в школу). Уменьшить стоимость обучения можно путем создания групп «Коллективный ученик» на базе Вашей общеобразовательной школы по инициативе преподавателя.

Учащиеся Заочной школы, успешно выполнившие все задания, получают удостоверение. Ряд фирм, в частности фирма Borland, учредили призы для лучших учащихся школы.

Для зачисления в Заочную школу пришлите заявление с указанием, по какому курсу Вы желаете пройти обучение, и пустой конверт с маркой и Вашим обратным адресом.

Наш адрес: 630058 г. Новосибирск-58, ул. Русская, 35, ВКИ НГУ, Заочная школа. Телефон для справок: (383-2)-33-19-33.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 1994 года по адресу: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4 — 94» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1441» или «Ф1448». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1441—1450 предлагались на Московской математической олимпиаде, задачи Ф1448—1457 (кроме Ф1450 и Ф1455) — на Московской физической олимпиаде этого года. Мы готовы также рассмотреть Ваши решения задач Санкт-Петербургской математической олимпиады, помещенных в этом номере журнала.

Задачи М1441 — М1450, Ф1448 — Ф1457

М1441. Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Докажите, что кузнечики не могут в некоторый момент оказаться в вершинах квадрата большего размера.
А.Ковальджи

М1442. Две окружности пересекаются в точках A и B. В точке A к обеим проведены касательные, пересекающие окружности в точках M и N. Прямые BM и BN пересекают окружности еще раз в точках P и Q (P — на прямой BM, Q — на прямой BN). Докажите, что отрезки MP и NQ равны.
И.Нагель

М1443. Бесконечная последовательность чисел x_n определяется условиями: $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$, причем $0 \le x \le 1$.
а) Докажите, что последовательность, начиная с некоторого места, периодическая в том и только в том случае, если x_1 рационально.
б) Сколько существует значений x_1, для которых эта последовательность — периодическая с периодом T (для каждого T=2, 3, ...)?
Г.Шабат

М1444. Существует ли такой многочлен $P(x)$, что у него есть отрицательный коэффициент, а все коэффициенты любой его степени $P^n(x)$, $n>1$, — положительные?
О.Крыжановский

М1445. Найдите наибольшее натуральное число, не оканчивающееся нулем, которое при вычеркивании одной (не первой) цифры уменьшается в целое число раз.
А.Галочкин

М1446. Из выпуклого многогранника с 9 вершинами, одна из которых A, параллельными переносами, переводящими A в каждую из остальных вершин, образуется 8 равных ему многогранников. Докажите, что хотя бы два из этих 8 многогранников пересекаются (по внутренним точкам).
Г.Гальперин

М1447. В квадрате клетчатой бумаги 10×10 нужно расставить один корабль 1×4, два — 1×3, три — 1×2 и четыре — 1×1. Корабли не должны иметь общих точек (даже вершин) друг с другом, но могут прилегать к границам квадрата. Докажите, что
а) если расставлять их в указанном выше порядке (начиная с больших), то этот процесс всегда удается довести до конца, даже если в каждый момент заботиться только об очередном корабле, не думая о будущих;
б) если расставлять их в обратном порядке (начиная с малых), то может возникнуть ситуация, когда очередной корабль поставить нельзя (приведите пример).
К.Игнатьев

М1448. Рассматривается произвольный многоугольник (не обязательно выпуклый).
а) Всегда ли найдется хорда многоугольника, которая делит его на равновеликие части?

б) Докажите, что любой многоугольник можно разделить некоторой хордой на части, площадь каждой из которых не меньше, чем 1/3 площади многоугольника.
(Хордой многоугольника называется отрезок, концы которого принадлежат контуру многоугольника, а сам он целиком принадлежит многоугольнику.)
В.Произволов

М1449. Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и AD — в точке Q. Докажите, что если каждая из трех пар биссектрис: внешних углов четырехугольника при вершинах A и C, внешних углов при вершинах B и D, а также внешних углов при вершинах Q и P (треугольников QAB и PBC соответственно) имеет точку пересечения, то эти три точки лежат на одной прямой.
С.Маркелов

М1450. Докажите, что для любого $k>1$ найдется степень 2 такая, что среди k последних ее цифр не менее половины составляют девятки. (Например, $2^{12} = 4096$, $2^{53} = ...992$).
Н.Васильев

Ф1448. Концы тонкой и легкой паутинки закреплены на одной высоте на расстоянии L друг от друга. Паук массой m ползет, цепляясь за паутинку. По какой траектории он при этом движется? Напишите уравнение этой кривой. Считайте, что паутинка подчиняется закону Гука, ее жесткость k, а длина до растяжения пренебрежимо мала.
Д.Григорьев

Ф1449. На гладком горизонтальном столе лежит тонкий обруч радиусом R и массой M, а маленькая шайба массой m лежит, касаясь его внутренней поверхности. Шайбе толчком придают скорость v_0 в касательном направлении. Как будет двигаться эта система? С какой силой шайба будет давить на обруч в процессе движения? Трения нет нигде.
К.Шокикиу

Ф1450. Тонкий длинный стержень шарнирно закреплен нижним концом на горизонтальной поверхности. Отклонив стержень от положения равновесия, ему дали упасть. Время падения составило при этом T. Каким стало бы это время, если бы нижний конец мог свободно скользить по плоскости?
З.Рафаилов

Ф1451. Обычный прибор для измерения давления разреженного газа (порядка 1 Па) представляет собой трубку диаметром 1 см, заполненную исследуемым газом. Вдоль оси трубки проходит проволока, нагреваемая протекающим по ней электрическим током, причем мощность источника поддерживается постоянной. Измеряя установившуюся температуру проволоки, находят — по заранее составленной таблице — давление газа. При попытке использования такого прибора для измерения давления неона оказалось, что имеется только таблица для гелия, атомы которого в 5 раз легче. Какие поправки нужно внести в таблицу?
А.Андрианов

Ф1452. На два длинных и гладких стержня, расположенных в горизонтальной плоскости на расстоянии a друг от друга, нанизаны две одинаковые бусинки массой

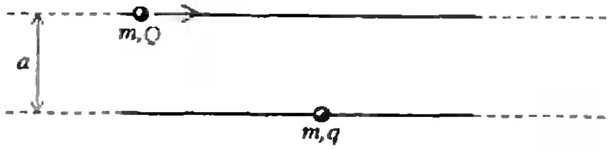


Рис. 1

m каждая, заряженные одноименными зарядами Q и q (рис. 1). В начальный момент одна из бусинок покоится, а другую издали запускают в ее сторону с некоторой начальной скоростью. При какой величине этой скорости она обгонит первоначально покоящуюся бусинку? Трения нет.
О.Шведов

Ф1453. В однородную жидкость с большим удельным сопротивлением погружены достаточно глубоко два одинаковых проводящих шара. Сопротивление, измеренное между шарами, оказалось равным R. Каким станет это сопротивление, если один из шаров заменить шаром вдвое меньшего радиуса? Жидкость смачивает шары.
В.Петерсон

Ф1454. Маятник состоит из жесткого невесомого стержня длиной l и закрепленного на его конце груза массой m. На груз нанесен электрический заряд Q. Заряд q противоположного знака укреплен над точкой подвеса на расстоянии d от нее. Чему равен период малых колебаний маятника? При какой величине заряда груза возможны такие колебания?
О.Шведов

Ф1455. Конденсаторы, емкости которых C и $2C$, заряжены каждый до напряжения U_0 и соединены последовательно «минусом» к «плюсу». К ним одновременно подключают две катушки: катушку индуктивностью L к конденсатору большей емкости, а катушку индуктивностью $2L$ к разноименным концам батареи конденсаторов. Найдите максимальный ток каждой из катушек. Через какое время после включения ток первой катушки станет максимальным?
А.Зильберман

Ф1456. Три маленьких громкоговорителя расположены в свободном пространстве на одной линии (рис. 2), расстояние между соседними составляет 0,4 м. На большом расстоянии от них, под углом 60° к перпендикуляру к

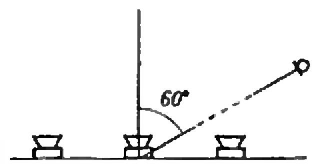


Рис. 2

линии находится чувствительный микрофон. Громкоговорители подключены к генератору, частоту которого можно изменять. При какой частоте этого генератора микрофон не будет регистрировать звук? Скорость звука составляет 330 м/с.
А.Склянкин

Ф1457. Оцените, какой мощности лампочку нужно ввернуть в рефлектор настольной лампы, чтобы она («фотонная ракета») взлетела. Масса лампы 1 кг.
Д.Григорьев

Решения задач М1411—М1420, Ф1428—Ф1437

М1411. *На острове Невезения каждый житель либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. На выборах президента, в которых участвовали все невезенцы, было только два кандидата — Елкин и Палкин. На вопрос наблюдателя ООН «за кого Вы голосовали?» большинство невезенцев ответило: «за Палкина», — а на вопрос «кто победил?» большинство ответило: «Елкин». Известно, что правдивых [ ] не менее четверти всех жителей.*

а) Кто победил на выборах?

б) Можно ли это наверняка определить, если правдивых [ ] на острове — лишь одна пятая всех жителей?

Что касается б), это — задача-шутка: если 4/5 всех жителей лжецы и большинство говорит, что победил Елкин, то, конечно, победил Палкин.

Определенного ответа на вопрос а), исходя из данных в условии, дать нельзя. Пусть $T = T_E + T_П$ — процент правдивых среди всех жителей (из них T_E голосовали за Елкина, $T_П$ — за Палкина), $F = F_E + F_П$ — процент лжецов (из них F_E — за Елкина, $F_П$ — за Палкина). Поскольку ответ «за Палкина» на первый вопрос дало большинство, значит

$$T_E + F_П < T_П + F_E. \qquad (1)$$

Если президентом стал Палкин (а ответ на второй вопрос — «Елкин»), то

$$T_E + F_E < T_П + F_П \qquad (2)$$

и

$$T_E + T_П < F_E + F_П; \qquad (3)$$

а если президентом стал Елкин, то знак неравенства в (2) и (3) противоположный. Нетрудно привести примеры, когда осуществляются и та, и другая ситуации, причем $T_П$ больше 25 (и конечно $T + F = 100$): если в качестве четверки (T_E, $T_П$, F_E, $F_П$) взять (10, 30, 30, 30) — победил Палкин, если (30, 30, 30, 10) — Елкин.

С этой задачей произошло недоразумение: на самом деле в формулировке задачи М1411а) в отмеченном значком [ ] месте должны были стоять слова «и голосовавших за проигравшего кандидата». (Именно в таком виде эта задача, как и четыре следующие, предлагалась на Петербургской математической олимпиаде прошлого года.) Тогда ответ в ней становится однозначным: президентом стал Елкин. В противном случае сложение неравенств (1), (2), (3) и равенства $T_E + T_П + F_E + F_П = 100$ дает $T_E < 25$. Противоречие.

Если же в пункте б) вставить в отмеченном значком [ ] месте слова «и голосовавших за проигравшего кандидата», то ответ будет отрицательным. Скажем, в примере (20, 25, 27, 28) побеждает Палкин, в примере (35, 20, 35, 10) — Елкин.

М1412. *Натуральные числа x и y таковы, что сумма дробей*

$$\frac{x^2-1}{y+1} + \frac{y^2-1}{x+1}$$

— целое число. Докажите, что каждая из дробей — целое число.

Пусть u — первая, v — вторая из этих дробей. Их сумма и произведение — целые числа, поэтому u и v — корни квадратного уравнения с целыми коэффициентами, скажем, $z^2 + mz + n = 0$. Так как u и v — рациональные корни, то дискриминант $m^2 - 4n$ этого уравнения — рациональное число и, более того, целое, причем той же четности, что и m. Но тогда u и v — тоже целые, ведь $u, v = \left(-m \pm \sqrt{m^2 - 4n}\right)/2$, а в числителе под корнем стоит четное число. Существует также много решений этой задачи, связанных с рассмотрением общих делителей чисел $x+1$ и $y+1$.

А.Перлин

М1413. *Точка M — середина стороны BC выпуклого четырехугольника ABCD. Известно, что величина угла AMD равна 120°. Докажите неравенство*

$$AB + BC/2 + CD \ge DA.$$

Пусть B' — точка, симметричная B относительно AM, C' — точка, симметричная C относительно MD. Угол $\angle B'MC'$ равен 60°, и треугольник $B'MC'$ — правильный. Длина ломаной $AB'C'D$ равна $AB+BC/2+CD$. Это не меньше длины отрезка AD, соединяющего ее концы.

С.Берлов

М1414. *Докажите, что существует функция $f(x)$, определенная при всех $x \ge 0$ и такая, что значение $f(f(f(\ldots(x)\ldots)))$ (где функция f применяется n раз) равно:*

$$а)\ \frac{x}{x+1};\ б)\ 1 + x + 2\sqrt{x}.$$

Положим $f_1(x) = f(x)$, $f_n(x) = f_{n-1}(f(x))$ при $n \ge 2$.

а) Будем рассматривать дробно-линейные отображения, т.е. функции вида $g(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Очевидно, композиция любых двух таких функций также является дробно-линейным отображением; в частности,

$$g(g(x)) = \frac{(a^2+bc)x + b(a+d)}{c(a+d)x + (bc+d^2)}.$$

Будем искать функцию $f(x)$ задачи среди дробно-линейных отображений таких, что $b=0$, $a=1$, $d=1$: $f(x) = \dfrac{x}{2cx+1}$, или $f(x) = \dfrac{x}{ex+1}$. Легко показать по индукции, что для такой функции

$$f_n(x) = \frac{x}{nex+1}. \qquad (*)$$

В самом деле, если для некоторого n равенство (*) доказано, то

$$f_{n+1}(x) = f(f_n(x)) = \frac{\dfrac{x}{nex+1}}{e\left(\dfrac{x}{nex+1}\right)+1} = \frac{x}{(n+1)ex+1}.$$

Значит, достаточно положить $e = \dfrac{1}{n}$, т.е. взять $f(x) = \dfrac{x}{\frac{1}{n}x+1}$.

б) Заметив, что $1 + x + 2\sqrt{x} = \left(1+\sqrt{x}\right)^2$, будем искать функцию в виде $f(x) = \left(a + b\sqrt{x}\right)^2$. Имеем:

$$f(f(x)) = \left(a(1+b) + b^2\sqrt{x}\right)^2.$$

Сузим класс рассматриваемых функций: будем считать $b=1$, т.е. $f(x) = \left(a+\sqrt{x}\right)^2$. Легко показать по индукции, что $f_n(x) = \left(na + \sqrt{x}\right)^2$. Значит, достаточно положить $a = \dfrac{1}{n}$, т.е. $f(x) = \left(\dfrac{1}{n} + \sqrt{x}\right)^2$.

О.Ижболдин, К.Кохась

М1415. *Даны два правильных 10-угольника, в каждой вершине того и другого написано натуральное число, причем сумма чисел на каждом 10-угольнике равна 99. Докажите, что можно отметить на том и другом 10-угольнике несколько подряд стоящих вершин (может быть, одну, но не все) так, что суммы отмеченных чисел будут одинаковы.*

Рассмотрим окружность, разбитую на 99 одинаковых дуг. Среди концов этих дуг отметим 10 точек, разбивающих окружность на 10 дуг, длины которых совпадают с десятью числами на первом 10-угольнике (порядок также сохраняется). Аналогичным образом построим вторую окружность, «моделирующую» второй 10-угольник. Наложим теперь вторую окружность на первую так, чтобы точки деления совпадали, и рассмотрим 99 поворотов на углы, кратные $2\pi/99$. Если бы после каждого поворота не более одной отмеченной точки на первой окружности совпадало с отмеченной точкой на второй окружности, то суммарно мы получили бы не более 99 совпадений, что невозможно, так как всего их, очевидно, должно быть ровно 100. Значит, при каком-то наложении первой окружности на вторую есть два совпадения отмеченных точек. Длины дуг между ними на обеих окружностях равны, а это и есть нужные нам сумм нескольких чисел подряд.

С.Берлов

М1416. *Среди бесконечного количества гангстеров каждый охотится за каким-то одним из остальных. Докажите, что существует бесконечное подмножество этих гангстеров, в котором ни один не охотится за кем-либо из этого подмножества.*

Пусть существует гангстер, за которым охотится бесконечно много коллег. Тогда это бесконечное множество и будет искомым.

Пусть у каждого гангстера лишь конечное число друзей. Будем строить множество задачи следующим образом. Выберем гангстера и убьем всех жаждущих его крови. В уцелевшем бесконечном множестве выберем второго гангстера, убьем тех, кто охотится за ним, и продолжим процесс по индукции. Пусть уже выбраны n гангстеров. Посадив на электрический стул всех покушающихся на них, заметим, что оставшееся множество бесконечно. Следовательно, процесс можно продолжить, т.е. существует бесконечно много выживших гангстеров.

В.Уфнаровский

М1417. *На сторонах AC и BC треугольника ABC выбраны точки D и E. Известно, что равны отношения величин углов:* $\dfrac{\angle CDE}{\angle BDE}=\dfrac{\angle CED}{\angle AED}$.
Верно ли, что треугольник ABC равнобедренный, если AE и BD
а) медианы, б) высоты, в) биссектрисы этого треугольника?

Ответ во всех трех случаях положителен.

а) Рассмотрим треугольники ABD и ABE — с общим основанием AB и равными высотами: если, например, угол A в ABD больше угла B в ABE, то угол DBA (в треугольнике DBA) меньше угла EAB (в треугольнике EAB). Значит, если $\angle CDE > \angle CED$, то $\angle BDE < \angle AED$ — и равенство задачи невозможно.

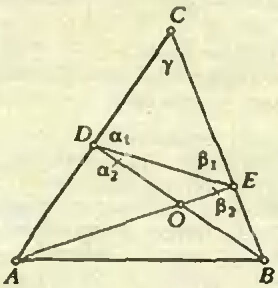
Замечание. Из проведенного рассуждения следует, что в любом треугольнике к большей стороне проведена меньшая медиана.

б) Из условий следует, что треугольник ABC остроугольный.

Поскольку $\dfrac{\alpha_1}{\frac{\pi}{2}-\alpha_1}=\dfrac{\beta_1}{\frac{\pi}{2}-\beta_1}$, то $\alpha_1=\beta_1$.

Значит, $CD=CE$, $\Delta CDB=\Delta CEA$, $CB=CA$.

Можно рассуждать и по-другому. Опишем около четырехугольника $CDOE$, где O — точка пересечения AE и BD, окружность. Из равенства условия следует, что точка D делит полуокружность CDO в том же отношении,



что точка E — полуокружность CEO. Значит, $DO=OE$, $\angle DCO=\angle ECO$. Следовательно, $\angle CAB=\angle CBA$.

в) Обозначим $k=\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ (см. рисунок). Имеем:

$$\alpha_1+\beta_1=\pi-\gamma,\quad \alpha_2+\beta_2=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}.$$

Получили: $\alpha_1+\beta_1=2(\alpha_2+\beta_2)=k(\alpha_2+\beta_2)$. Отсюда $k=2$.

Пусть биссектрисы углов CDE и CED пересекаются в точке O_1. Так как $\angle O_1DE=\alpha_2$, $\angle O_1ED=\beta_2$, то $OO_1\perp DE$. С другой стороны, точки O и O_1 лежат на биссектрисе угла C. Значит, в треугольнике CDE биссектриса угла C совпадает с высотой, $\alpha_1=\beta_1$, $\angle CAE=\angle CBD$, т.е. $\angle A=\angle B$.

В.Сендеров

М1418. *На плоскости задано конечное множество векторов с длинами не больше 1 и суммой S. Докажите, что для любого числа λ между 0 и 1 найдется некоторое подмножество этих векторов, сумма которых отличается от λS на вектор длиной не больше $1/\sqrt{2}$.*

Введем на плоскости декартову систему координат Oxy так, чтобы ось Oy совпадала по направлению с вектором: пусть $\vec{S}=\vec{OC}$, где C имеет координаты $(0,s)$, и $\lambda\vec{S}=\vec{d}=\vec{OD}$, $D=(0,d)$, где $0<d<s$. Отложим данные вектора друг за другом от начала координат в таком порядке: сначала — все вектора с положительными абсцис-

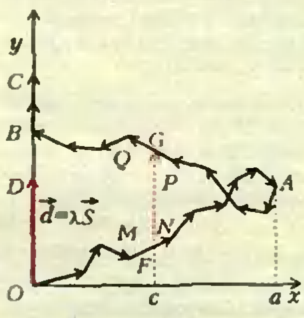


Рис. 1

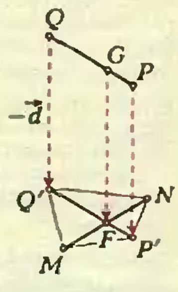


Рис. 2

сами (они составляют участок OA ломаной на рисунке 1, идущий вправо, A — точка с абсциссой a), затем — с отрицательными (они составляют участок AB, идущий влево, $B=(0,b)$) и в конце — с нулевыми (если такие вектора есть; иначе B совпадает с C). Первые два участка — графики кусочно-линейных функций на отрезке $[0,a]$, которые мы обозначим $y=f(x)$ и $y=g(x)$.

Рассмотрим сначала основной случай, *когда D лежит на отрезке OB*. (В частности, так будет, если B совпадает с C.) Вертикальная прямая $x=t$ (t меняется от 0 до a) пересекает каждый из отрезков OA, AB ломаной в одной точке, причем длина заключенного между ними отрезка — разность $g(t)-f(t)$ — изменяется непрерывно, при $t=0$ равна $b>d$, при $t=a$ равна 0. Поэтому существует такое $c>0$, что наша ломаная высекает на прямой $x=c$ вектор $\vec{GF}$ длиной d. Пусть F лежит на векторе $\vec{MN}$, G — на векторе $\vec{PQ}$ (рис. 2). Перенесем $\vec{PQ}$ параллельно на вектор $-\vec{d}$ так, чтобы он проходил через точку F. Получим вектор $\vec{P'Q'}$. Заметим, что разности векторов $\vec{NQ}$, $\vec{MQ}$, $\vec{MP}$, $\vec{NP}$ — каждый из них есть сумма некоторого подмножества из данных векторов $\vec{-}$ и вектора $\vec{d}$ соответственно равны сторонам NQ', MQ', MP' и NP' четырехугольника $NQ'MP'$, диагонали которого не превосходят 1. Поэтому хотя бы одна из этих сторон не больше $1/\sqrt{2}$. Действительно, один из углов четырехугольника $NQ'MP'$ не меньше 90°. Пусть этот угол $NP'M$. Обе стороны NQ' и $Q'M$ не могут быть больше $1/\sqrt{2}$, так как в противном случае диагональ MN была бы больше 1 (круги с радиусами $1/\sqrt{2}$ и центрами M и N покрывают круг с диаметром MN).

Остается рассмотреть случай, когда D лежит на участке BC, т.е. на одном из вертикальных векторов $\vec{KL}$ из данного множества длиной не больше 1. Тогда по крайней мере одна из точек K и L удалена от D не больше чем на $1/2$.

Замечания. 1. Можно построить примеры, показывающие, что если λ — иррациональное число или несократимая дробь с четным знаменателем, то указанная в задаче оценка является точной. Точная оценка при остальных λ авторам неизвестна.

2. Эта задача является обобщением задачи М768 (В.Гринберг), решение которой опубликовано в «Кванте» № 2 за 1983 год.

3. Напомним еще одну похожую задачу. Пусть $y=f(x)$ — график непрерывной функции на отрезке $[0;1]$, $f(0)=f(1)$. Для каких λ, $0<\lambda<1$, заведомо найдется хорда этого графика длиной λ, параллельная оси Ox, другими словами, существует x такое, что $f(x)=f(x+\lambda)$? Ответ на этот вопрос совершенно другой, чем в нашей задаче: такая хорда обязательно найдется лишь для λ вида $1/n$, $n=1, 2, \ldots$. (См. статью И.М.Яглома «О хордах непрерывных кривых» в «Кванте» № 4 за 1977 год.)

Д.Тамаркин, Д.Терешин

М1419. *Пусть $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$, где $n>1$. Докажите, что многочлен $f(x)$ нельзя представить в виде произведения многочленов степени больше 1 с целыми коэффициентами.*

Эта задача, как и следующая, предлагалась на международной олимпиаде 1993 года (состоявшейся в Турции). Обозначим $x^n+5x^{n-1}+3$ через $f(x)$. Предположим, что он разлагается на множители с целыми коэффициентами: $f(x)=g(x)h(x)$, где $g(x)$ и $h(x)$ — многочлены степени выше первой. Пусть

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n,$$

$$g(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m,$$

$$h(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_{n-m}x^{n-m}.$$

Будем считать, что b_0 делится на 3, тогда c_0 не делится на 3 (оно равно 1 или -1). Пусть i — наименьшее число, такое что b_i не делится на 3. Тогда

$$a_i=b_ic_0+(b_{i-1}c_1+b_{i-2}c_2+\ldots)$$

не делится на 3. Глядя на данный многочлен $f(x)$, видим, что $i\geq n-1$, откуда следует, что степень многочлена $h(x)$ не больше 1. Противоречие.

Замечания. 1. Разумеется, поскольку $f(x)$ не имеет рациональных корней, его вообще нельзя разложить в произведение многочленов с целыми коэффициентами.

2. Этим же способом можно доказать следующее утверждение: если у многочлена $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ все коэффициенты целые, $a_0, a_1, \ldots, a_k$ делятся на простое число p, a_0 не делится на p^2, a_n не делится на p и $f(x)$ представлен в виде произведения двух многочленов с целыми коэффициентами, то степень одного из них не ниже $k+1$. (В частности, при $k=n-1$ получаем известный критерий Эйзенштейна: если все коэффициенты $f(x)$, кроме коэффициента при старшем члене, делятся на простое число p, коэффициент при старшем члене не делится на p и свободный член не делится на p^2, то $f(x)$ неприводим, т.е. не может быть представлен в виде произведения двух многочленов ненулевой степени с целыми коэффициентами.)

В.Сендеров

М1420. *Для любых трех точек P, Q, R плоскости обозначим через $m(PQR)$ наименьшую из высот треугольника PQR. (Если точки P, Q, R лежат на одной прямой, то $m(PQR)=0$). Докажите, что для любых четырех точек A, B, C, X плоскости*

$$m(ABC)\leq(ABX)+m(AXC)+m(XBC).$$

Пусть PQ — данный отрезок длины d. Рассмотрим функцию $z=f(M)=m(PQM)$, где M — любая точка одной из полуплоскостей, ограниченных прямой PQ, а $m(PQM)$ определено как в условии задачи. На рисунке 1 изображены линии уровня этой функции $z=f(M)$, т.е. линии, на которых она принимает постоянное значение: при $z<d\sqrt{3}/2$ они состоят из двух лучей и отрезка, при $z\geq d\sqrt{3}/2$ — просто из двух лучей, причем продолжения всех этих лучей проходят через точки P или Q. Чтобы убедиться в правильности этой карты, достаточно вос-

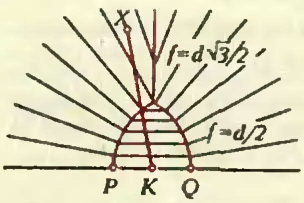


Рис. 1

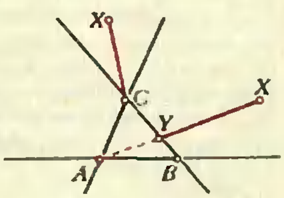


Рис. 2

пользоваться тем, что наименьшая высота в треугольнике соответствует наибольшей стороне: для точек внутри «шлема», образованного пунктирными дугами с центрами P и Q, наибольшей стороной треугольника PQM является PQ, а вне шлема — PM, если точка лежит в правой полуплоскости, и QM, если в левой.

На этой карте линиям уровня, расположенным ниже, соответствуют меньшие значения функции: более точно, как легко проверить по этой карте, верно такое утверждение.

Лемма 1. *Если X — произвольная точка полуплоскости, K — любая точка отрезка PQ, то при движении точки M по отрезку XK (от X к K) значение функции $z = f(M)$ убывает (а если K — одна из точек P или Q, то во всяком случае не возрастает).*

Перейдем теперь непосредственно к решению задачи. Положим

$$g(M) = m(ABX) + m(BCX) + m(CAX). \qquad (*)$$

Для каждой точки X вне треугольника ABC укажем точку Y на его границе, для которой $g(Y) \le g(X)$. Для точки X внутри области, ограниченной стороной BC и продолжениями двух других сторон (AB и AC), за Y можно взять точку пересечения отрезков AX и BC: по лемме 1, при движении по отрезку XY значение каждого слагаемого в правой части $(*)$, а значит и всей суммы, не возрастает, так что $g(Y) \le g(X)$, аналогично для точки X внутри (или на границе) угла между продолжениями двух сторон (за точку C) можно взять вершину этого угла (см. рис. 2).

Остается рассмотреть точки X, лежащие внутри (или на сторонах) треугольника, и доказать неравенство лишь для них.

Можно считать, что наибольшая сторона треугольника ABC — это $AB = c$, тогда $m(ABC) = h$ — проведенная к ней высота, и

$$S = ch/2$$

— площадь треугольника ABC. Воспользуемся еще одной почти очевидной леммой.

Лемма 2. *Любой отрезок, расположенный в треугольнике, не превосходит его наибольшей стороны.*

В нужном нам случае, когда это — отрезок, выходящий из вершины, лемма 2 совершенно очевидна — такой отрезок короче одной из сторон, выходящей из той же вершины (общий случай легко сводится к этому).

Пусть h_1, h_2, h_3 — наименьшие высоты треугольников ABX, BCX, CAX; d_1, d_2, d_3 — соответствующие им наибольшие стороны этих треугольников. Поскольку сумма площадей этих треугольников равна S, пользуясь леммой 2, получаем

$$2S = ch = d_1h_1 + d_2h_2 + d_3h_3 \le c(h_1 + h_2 + h_3)$$

(треугольнику, вырождающемуся в отрезок, отвечает нулевое слагаемое), откуда следует нужное неравенство: $h \le h_1 + h_2 + h_3$.

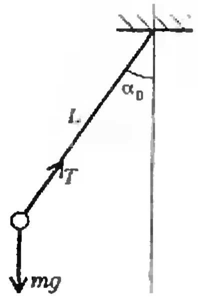
Анализируя решение, нетрудно показать, что равенство в условии задачи достигается: для правильного треугольника ABC — во всех точках, расположенных внутри ABC и на его границе; для равнобедренного, у которого боковая сторона больше основания, — во всех точках X основания и в вершине; для других треугольников — только в вершинах.

Н.Васильев

Ф1428. *Математический маятник совершает колебания с очень малой угловой амплитудой α_0 в вертикальной плоскости. Скорость грузика в нижней точке составляет v_0. В тот момент, когда грузик достигает крайней точки, ему толчком сообщают скорость v_0 в направлении, перпендикулярном плоскости его прежних колебаний. По какой траектории будет в дальнейшем двигаться грузик? Через какое время он снова окажется в точке удара?*

При тех условиях, которые заданы в задаче, грузик будет двигаться по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости. Докажем это.

Для такого движения со скоростью v можно записать (см. рисунок)



$$\frac{mv^2}{r} = T\sin\alpha_0, \; r = L\sin\alpha_0, \; T\cos\alpha_0 = mg.$$

Отсюда, приняв $\sin\alpha_0 \approx \operatorname{tg}\alpha_0 \approx \alpha_0$, получим

$$v^2 = gL\alpha_0^2.$$

При отпускании грузика из крайнего положения без начальной скорости он совершает колебания в вертикальной плоскости. При этом выполняются соотношения

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgL(1-\cos\alpha_0), \; \cos\alpha_0 = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha_0}{2} \approx 1 - \frac{\alpha_0^2}{2},$$

откуда

$$v_0^2 = gL\alpha_0^2 = v^2.$$

Что и нужно было доказать.

Теперь найдем время обращения грузика по окружности:

$$T = \frac{2\pi r}{v_0} = \frac{2\pi v_0}{g\alpha_0}.$$

А.Алексеев

Ф1429. *Полировальная машина прошла по льду, оставив за собой полосу, на которой коэффициент трения скольжения μ_2 меньше коэффициента трения μ_1 на нетронутом льду. Раскрученную вокруг вертикальной оси шайбу кладут плашмя на лед так, что центр шайбы приходится на границу раздела полос. Найдите ускорение шайбы в начальный момент. Перепада высот на границе нет.*

Для анализа движения рассмотрим тонкое кольцо (рис. 1). На его маленький кусочек A действует сила трения $f_{тр}$, направление которой показано на рисунке. На симметричный кусочек A^* действует такая же по величине сила. Сумма этих двух сил направлена вдоль границы раздела полос льда. Пользуясь этим, найдем теперь полную силу трения, действующую на шайбу в начальный момент.

Рассмотрим то же тонкое кольцо. Обозначим радиус его r, массу m, длину выделенного кусочка Δl, коэффициент трения μ. Силы реакции распределены равномерно по площади шайбы, тогда на кусочек действует сила трения, равная

$$f_{тр} = \mu \frac{m\Delta l}{2\pi r} g.$$

Ее проекция на направление результирующей силы составляет (рис. 2)

$$f_{тр} \cos\alpha = \frac{\mu m g \Delta l \cos\alpha}{2\pi r} = \frac{\mu m g \Delta h}{2\pi r}.$$

После суммирования по полукольцу получаем

$$\sum f_{тр i} \cos\alpha_i = \frac{\mu m g \cdot 2r}{2\pi r} = \frac{\mu m g}{\pi}.$$

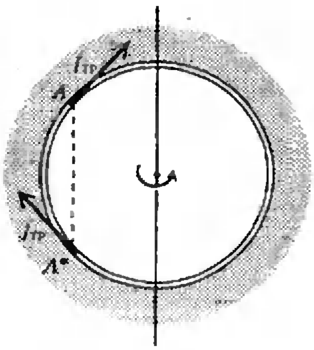


Рис. 1

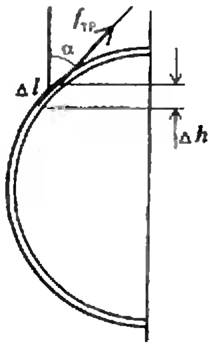


Рис. 2

Ясно, что для всей шайбы сумма сил трения равна

$$F = \frac{(\mu_1 - \mu_2) m g}{\pi},$$

а ускорение —

$$a = \frac{F}{m} = \frac{(\mu_1 - \mu_2) g}{\pi}.$$

(Конечно, это только в начальный момент!)

Л. Маркович

Ф1430. *На гладкий горизонтальный стержень надеты две маленькие шайбы, массы которых равны m и $2m$, связанные легкой нитью длиной $2L$ (рис. 1). К середине нити прикреплен еще один груз массой m. Вначале грузы удерживают так, что натянутая нить горизонтальна, а растяжение ее мало (разумеется, для этого приходится придерживать средний груз), а затем — отпускают. Найдите скорости шайб перед ударом друг о друга.*

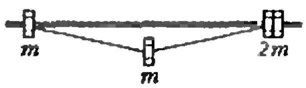


Рис. 1

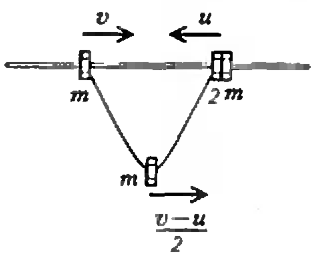


Рис. 2

Непосредственно перед ударом шайб друг о друга вертикальная скорость висящего груза обращается в ноль. Из закона сохранения импульса (см. рис. 2)

$$mv + m\frac{v-u}{2} - 2mu = 0$$

получаем

$$u = 0{,}6v.$$

Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{2mu^2}{2} + \frac{m(v-u)^2}{8} - mgL = 0.$$

Решая это уравнение после подстановки $u = 0{,}6v$, находим

$$v = \sqrt{\frac{25}{22} gL}, \quad u = \sqrt{\frac{9}{22} gL}.$$

А.Зильберман

Ф1431. *Когда я хочу помыть трехлитровую банку, я наливаю в нее литр горячей воды и начинаю интенсивно трясти банку, закрыв ее ладонью. Меня иногда удивляет сила, которая давит на ладонь, когда вода стремится вырваться и обрызгать меня. Оцените величину этой силы. Необходимые для оценки данные хорошо известны.*

Давайте подумаем, из чего может складываться искомая сила. Прежде всего, конечно же, из силы удара воды о ладонь. Кроме того, если наливать горячую воду недолго, воздух в банке за это время не успевает прогреться, поэтому, если начать банку трясти, вода быстро нагреет воздух, его давление возрастет — возрастет и сила давления на ладонь. И наконец, первоначальное давление водяных паров в банке мало, а при тряске пар быстро становится насыщенным и прибавляется давление насыщенного пара (да еще при большой температуре), что тоже вносит существенный вклад в силу.

Оценим все эти силы.

Я могу трясти банку с частотой $\nu \sim 2-3$ Гц. Скорость воды массой $m = 1$ кг около 1 м/с. Вода разбрызгивается, поэтому время взаимодействия воды и ладони оценим как $\Delta t \sim 1/(2\nu) \sim 0{,}2$ с. Тогда сила удара воды о ладонь равна

$$F_1 = \frac{2mv}{\Delta t} \sim 10 \text{ Н}.$$

Сила, в общем, небольшая. Мне всегда казалось, что вода вырывается с большим желанием.

Теперь о силе, связанной с увеличением давления воздуха. Так как объем воздуха не изменяется, то

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{\Delta T}{T_0}.$$

Значит, изменение давления по сравнению с атмосферным равно

$$\Delta p = \frac{p_0 \Delta T}{T_0},$$

а сила —

$$F_2 = \Delta p S = \frac{p_0 S \Delta T}{T_0}.$$

Для реальных значений всех величин получаем

$$F_2 \sim 100 \text{ Н}.$$

Если же мы учтем еще увеличение давления насыщенного пара до $\Delta p_н \sim 10^4$ Па, то добавится сила

$$F_3 = \Delta p_н S \sim 100 \text{ Н}.$$

Таким образом, суммарная сила

$$F = F_1 + F_2 + F_3 \sim 200 \text{ Н}.$$

Получается, что сила удара воды роли почти не играет. По этой причине, если не очень осторожно переворачивать только-только закатанные банки, то крышку «срывает» не сила удара воды, а сила давления пара и нагретого воздуха.

А.Дешковский

Ф1432. *Мыльный пузырь надувают азотом при комнатной температуре. При каком диаметре пузыря он начнет «всплывать» в атмосферном воздухе? Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 0{,}04$ Н/м. Весом пленки пренебрегите.*

Мыльный пузырь начнет «всплывать», когда плотность азота внутри пузыря будет равна плотности окружающего атмосферного воздуха:

$$\rho_а = \rho_в .$$

Из уравнения состояния для идеального газа получим

$$\rho_в = \frac{p_0 M_в}{RT},$$

а

$$\rho_а = \frac{(p_0 + 8\sigma/d)M_а}{RT}.$$

Здесь p_0 — атмосферное давление, $M_а$ и $M_в$ — молярные массы азота и воздуха, R — газовая постоянная, T — комнатная температура, d — диаметр пузыря. Из равенства плотностей следует, что

$$d = \frac{8M_а\sigma}{p_0(M_в - M_а)}.$$

При $p_0 = 10^5$ Па, $M_а = 28$ г/моль и $M_в = 29$ г/моль искомый диаметр мыльного пузыря равен

$$d = 9\cdot 10^{-5}\ \text{м}.$$

А.Шеронов

Ф1433. *Электрон налетает на систему заряженных сеток (рис.1). Сетки расположены параллельно друг другу, расстояние между соседними сетками d, площадь каждой S (размеры сеток во много раз больше d). Всего сеток $2N$, их заряды чередуются: $-Q, Q, -Q, Q, \ldots, Q$. Скорость электрона при подлете к системе равна v_0 и составляет угол α с осью системы. Найдите скорость и угол вылета электрона из системы. Какую скорость будет иметь электрон на большом расстоянии от системы?*

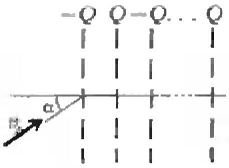


Рис. 1

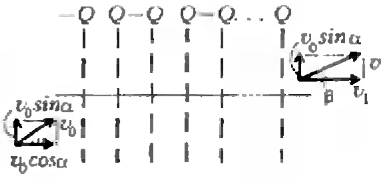


Рис. 2

В такой системе сеток чередуются области нулевого поля и области, где поле равно

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}.$$

Если сеток $2N$, то электрон пройдет N областей с полем, т.е. разность потенциалов

$$U = EdN = \frac{QdN}{\varepsilon_0 S}.$$

При этом изменится «продольная» составляющая скорости электрона, а «поперечная» останется без изменения (рис.2). Из закона сохранения энергии

$$\frac{m(v_0\cos\alpha)^2}{2} + eU = \frac{mv_1^2}{2}$$

получаем

$$v_1 = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + \frac{2e}{m}\frac{QdN}{\varepsilon_0 S}}.$$

Скорость на вылете равна

$$v = \sqrt{v_1^2 + (v_0\sin\alpha)^2} = \sqrt{v_0^2 + \frac{2eQdN}{m\varepsilon_0 S}}$$

и составляет с осью системы угол

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{v_0\sin\alpha}{v_1} = \operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \frac{2eQdN}{mv_0^2\varepsilon_0 S}}}.$$

Вдали от сеток скорость электрона снова должна стать v_0 (т.е. кинетическая энергия снова вернется к прежнему значению), изменится только направление его движения.

Д.Семенцов

Ф1434. *Квадратная проволочная рамка, сделанная из проволоки диаметром d_0, находится вблизи длинного прямого провода с током I_0 (рис.1). При выключении тока рамка приобретает импульс p_0. Куда направлен этот импульс? Какой импульс получила бы рамка, если бы начальный ток в проводе составлял $I_1 = 3I_0$, а диаметр проволоки рамки был $d_1 = 2d_0$?*

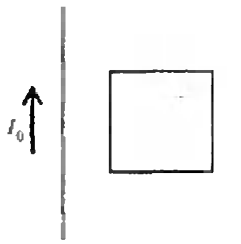


Рис. 1

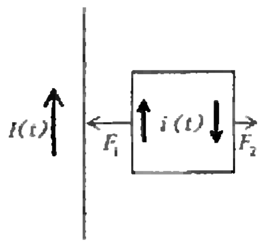


Рис. 2

При уменьшении тока в проводе рамку пронизывает переменный (во времени) магнитный поток $\Phi(t)$, который пропорционален величине тока $I(t)$ в проводе:

$$\Phi(t) \sim I(t).$$

Возникающее при этом вихревое электрическое поле вызывает в рамке ток

$$i(t) = -\frac{1}{R}\frac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t},$$

где R — омическое сопротивление рамки. Поскольку $R \sim 1/d^2$, то

$$i(t) \sim \frac{\Delta I(t)}{\Delta t} d^2.$$

На левую сторону рамки со стороны магнитного поля провода будет действовать сила Ампера (рис.2)

$$F_1 \sim I(t)i(t) \sim I(t)\frac{\Delta I(t)}{\Delta t}d^2 \sim \frac{\Delta\left(I^2(t)\right)}{\Delta t}d^2.$$

Очевидно, что аналогичная сила F_2 будет действовать на правую сторону рамки. Результирующая сила равна

$$F = F_1 - F_2 \sim \frac{\Delta\left(I^2(t)\right)}{\Delta t}d^2$$

и направлена влево.

За бесконечно малое время Δt на рамку подействует импульс силы

$$\Delta p = F\Delta t \sim \Delta\left(I^2(t)\right)d^2 .$$

Полный импульс, приобретенный рамкой за время изменения тока в проводе от начального значения I до нуля, будет

$$p \sim I^2 d^2 .$$

В первом случае этот импульс равен p_0 и направлен влево. Во втором случае рамка получит импульс

$$p_1 = \left(\frac{I_1 d_1}{I_0 d_0}\right)^2 p_0 = 36 p_0 .$$

В.Можаев

Ф1435. *В схеме, изображенной на рисунке 1, напряжение батарейки равно $\mathscr{E}$, а конденсатор заряжен до напряжения $U = 2\mathscr{E}$. После того как ток в катушке практически перестал изменяться, ключ замкнули. Через какое время после этого заряд конденсатора изменится на 1%? Во сколько раз за это время изменится ток через катушку? Сопротивления резисторов $R = 100$ Ом, емкость конденсатора $C = 10$ мкф, индуктивность катушки $L = 1$ Гн.*

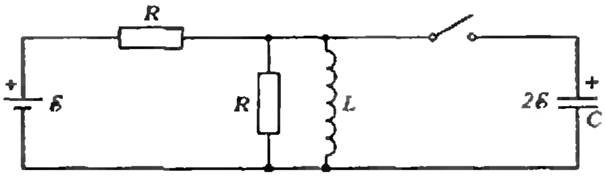


Рис. 1

Установившийся ток через катушку равен

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}}{R}.$$

При подключении конденсатора этот ток сразу не изменится. Найдем токи через верхний резистор (рис.2) —

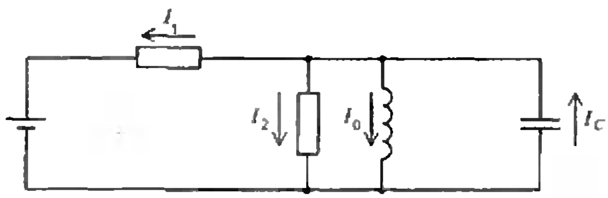


Рис. 2

$$I_1 = \frac{2\mathscr{E} - \mathscr{E}}{R} = \frac{\mathscr{E}}{R}$$

и через нижний —

$$I_2 = \frac{2\mathscr{E}}{R}.$$

Тогда ток через конденсатор составит

$$I_C = I_0 + I_1 + I_2 = \frac{4\mathscr{E}}{R}.$$

Изменение заряда на 1% мало меняет эти токи. Будем считать их неизменными и найдем время τ, за которое произойдет изменение заряда конденсатора:

$$\Delta q = 0{,}01 q = 0{,}01 \cdot 2\mathscr{E}C = I_C \tau = \frac{4\mathscr{E}\tau}{R},$$

откуда

$$\tau = 0{,}005 RC = 5 \cdot 10^{-6} \text{ с}.$$

Сравним теперь это время с периодом колебаний LC-контура:

$$T_{LC} = 2\pi\sqrt{LC} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ с} \gg \tau = 5 \cdot 10^{-6} \text{ с}.$$

Видно, что и ток через катушку изменится на небольшую часть:

$$\Delta I = \frac{\mathscr{E}_{\text{инд}}\tau}{L} = \frac{2\mathscr{E} \cdot 0{,}005 RC}{L} = I_0 \cdot 0{,}01 \frac{R^2 C}{L},$$

$$\frac{\Delta I}{I_0} = 0{,}01 \frac{R^2 C}{L} = 0{,}001 .$$

Это и в самом деле очень немного.

З.Рафаилов

Ф1436. *Настраивая микроскоп, читатель журнала «Квант» обнаружил, что он четко видит обоими глазами изображение объекта, когда тот расположен на расстоянии $d = 6{,}5$ мм от объектива. Длина тубуса микроскопа $L = 100$ мм. Фокусное расстояние объектива $F_1 = 6$ мм, окуляра $F_2 = 26$ мм. Какие очки следует носить читателю?*

Если на расстоянии d $(> F_1)$ от объектива микроскопа поместить предмет, то его действительное изображение получится на расстоянии f от объектива. Из формулы линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F_1}$$

получаем

$$f = \frac{dF_1}{d - F_1} = 78 \text{ мм}.$$

Изображение предмета в объективе микроскопа необходимо рассматривать как действительный предмет для окуляра, так как лучи, идущие от объектива, падают на окуляр расходящимся пучком Этот предмет отстоит от окуляра на расстоянии $d_1 = L - f = 22$ мм $(< F_2)$, а значит, мнимое изображение в окуляре получится на расстоянии

$$f_1 = \frac{d_1 F_2}{F_2 - d_1} = 143 \text{ мм}.$$

Это изображение и будет четко видеть человек, поэтому f_1 — расстояние наилучшего зрения глаза человека (считаем, что глаз вплотную прилегает к окуляру).

Надевая очки, человек должен четко различать предметы на расстоянии $d_0 = 25$ см от глаз, т.е. на расстоянии наилучшего зрения нормального глаза (считаем, что линзы очков вплотную прилегают к глазам человека). При этом очки должны давать мнимые изображения этих предметов на расстоянии f_1 от глаз. Поэтому можно записать

$$\frac{1}{d_0} - \frac{1}{f_1} = D,$$

где D — оптическая сила очков, необходимых человеку. Отсюда находим

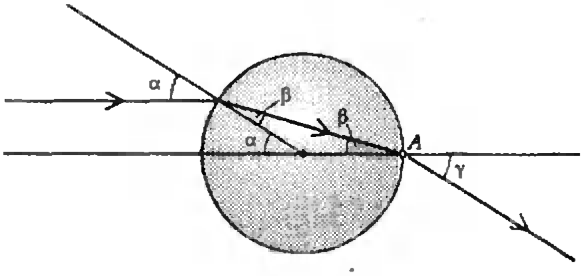
$$D = 3 \text{ дптр}.$$

Итак, у человека близорукость и ему необходимы очки, линзы которых имеют оптическую силу -3 дптр. И не нужно ходить к окулисту за рецептом для очков!

А. Юдин

Ф1437. *Узкий пучок света диаметром $d = 1$ см падает перпендикулярно на экран. На пути пучка помещают прозрачный шар радиусом $R = 20$ см, сделанный из материала с коэффициентом преломления $n = 2$ (дорогая штука, между прочим! — прим.ред.). Центр шара находится на оси пучка на расстоянии $L = 1$ м от экрана. Найдите диаметр пятна на экране.*

Диаметр пучка мал по сравнению с диаметром шара, значит, расчет углов преломления можно упростить, приняв $\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi = \varphi$. Рассмотрим один из лучей — пусть угол падения на шар равен α (см. рисунок). Тогда (только для $n = 2!$) при всех углах падения луч должен пройти через точку A на конце диаметра, параллельного пучку, т.е.



$$\beta = \frac{\alpha}{n} = \frac{\alpha}{2}.$$

После выхода из шара (из точки A) луч пойдет под углом $\gamma = n\beta = \alpha$ к оси. Диаметр пятна на экране определится крайними лучами падающего пучка. Для них

$$\alpha = \frac{d}{2R},$$

и диаметр пучка

$$D = (L-R)\alpha \approx \frac{(L-R)d}{2R} = 0{,}02 \text{ м}.$$

Заметим, что прозрачный шарик из материала с $n = 2$ обладает чрезвычайно полезным свойством — тонкий параллельный пучок, упавший на него, отражается (если сделать «сзади» зеркальное покрытие) точно назад, оставаясь параллельным. Таким же свойством обладает и трехгранный прямоугольный отражатель, но шарики удобнее — вот только материал для них получить нелегко!

Л.Маркович, А.Слободянюк

ИНФОРМАЦИЯ

ЗАОЧНАЯ ОЛИМПИАДА ВКИ НГУ

В заочной олимпиаде Высшего колледжа информатики Новосибирского государственного университета (ВКИ НГУ), проходимой в рамках программы «Молодые информатики Сибири», могут принять участие учащиеся 7–9 классов. Олимпиада проводится по двум разделам: информатика (программирование) и компьютерная техника (физические основы) — соответствующим двум потокам обучения в ВКИ НГУ. Победители награждаются призами и дипломами. Лучшие участники олимпиады приглашаются в Летнюю школу информатики и программирования в Новосибирском Академгородке. Успешное участие в олимпиаде будет также учитываться при поступлении в колледж.

Олимпиада проводится в два тура. *Решение задач первого тура необходимо выслать в течение полутора месяцев со дня выхода журнала.* Решения высылайте в адрес ВКИ НГУ с пометкой на конверте «Заочная олимпиада» и указанием раздела. Не забудьте указать класс, в котором Вы учитесь, и вложить пустой конверт с маркой и обратным адресом. Успешно прошедшим первый тур будут высланы задачи второго тура.

Наш адрес: 630058 г. Новосибирск-58, ул. Русская, 35, ВКИ НГУ, Заочная олимпиада. Телефон для справок: (383-2)-33-19-33.

Задачи первого тура

Компьютерная техника (*физические основы*)

Задачи 1, 2а предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 1, 2 — для восьмых классов, 1, 2, 3 — для девятых классов.

1. Квадратная пластинка со стороной a равномерно вращается вокруг центра с периодом T. К боковой стороне пластинки прижимается бусинка так, что при вращении пластинки она скользит по периметру. Каковы средняя скорость и перемещение бусинки за время $t_1 = T/8$, $t_2 = T/4$, $t_3 = 3T/8$ и $t_4 = T$, если движение бусинки начинается от угла квадрата?

2. Через какое время все жители условной «планеты» узнают о полете самолета(ов), если самолет летит со сверхзвуковой скоростью v, а звук распространяется в атмосфере со скоростью c без затухания и огибает грани планеты? Рассмотрите два случая.

а) «Планета» имеет вид круга на конечной плоскости. Самолет стартует с границы круга и летит вдоль диаметра.

б) «Планета» имеет вид куба. Три самолета одновременно вылетают из одной вершины куба со скоростью $2c$, чтобы приземлиться в противоположной вершине. Каждый из них вначале летит по диагонали одной из граней, а затем — из следующей вершины вдоль ребра.

3. Два кольца с одинаковыми радиусами могут вращаться на одной вертикальной оси. Верхнее кольцо массой m раскручивают до линейной скорости v и кладут на нижнее кольцо массой M, лежащее на плоскости. Найдите коэффициент трения между кольцами, если они перестали проскальзывать через время t? Трением в оси и на плоскости пренебречь.

Информатика (*программирование*)

1. Выясните, сколько положительных элементов содержит матрица $a(N,N)$, элементы которой равны:

а) $a(i,j) = \sin\left(\frac{i^2 - j^2}{N}\right)$;

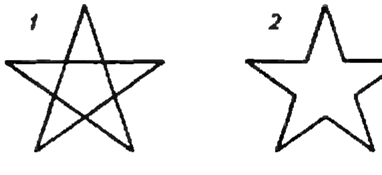
б) $a(i,j) = \cos(i^2 + N)$.

Постарайтесь ответить на вопрос, не прибегая к вычислениям синуса и косинуса.

2. Разработайте и реализуйте алгоритм рисования звезд типа *1* и *2* (см. рисунок) без отрыва пера от бумаги. Обобщите этот алгоритм для рисования правильных n-вершинных звезд в двух случаях:

а) для любого нечетного количества вершин;

б) для любого количества вершин.



Как учили физике 200 лет назад

А.АНДРЕЕВ

Московскому университету скоро исполнится 250 лет. За это время из маленького училища с громким названием, в котором едва насчитывался десяток студентов, он превратился в один из центров мировой науки. Менялись здания, люди, работавшие и учившиеся в университете, но многие предметы оставались теми же, что и столетия назад: уже в первую программу занятий входили математика, физика, химия, история, юриспруденция. Можно сравнивать их преподавание тогда и сейчас, сопоставлять с процессом развития и распространения знаний в России — Московский университет развивался вместе с российской наукой, а та старалась не отставать от европейской и мировой.

Многие науки, и особенно физика, претерпели за два последних века значительную эволюцию. Характерные черты этой эволюции будут лучше ясны, если представлять, что думали о физике и как ее преподавали в различные моменты времени. Я выбираю самое начало XIX века — время, во многих отношениях, переломное как в истории физики, так и для Московского университета — и приглашаю вас на воображаемую прогулку по этому времени.

Самым известным и полным руководством по физике того времени был трехтомный учебник М.Бриссона, переведенный с французского и изданный в России московским профессором П.И.Страховым в 1802 году. Здесь много непривычного для современного читателя, но главную мысль Бриссона, проходящую красной нитью через всю книгу, полезно помнить и в наше время: физика — это, прежде всего, опытная наука, она изучает

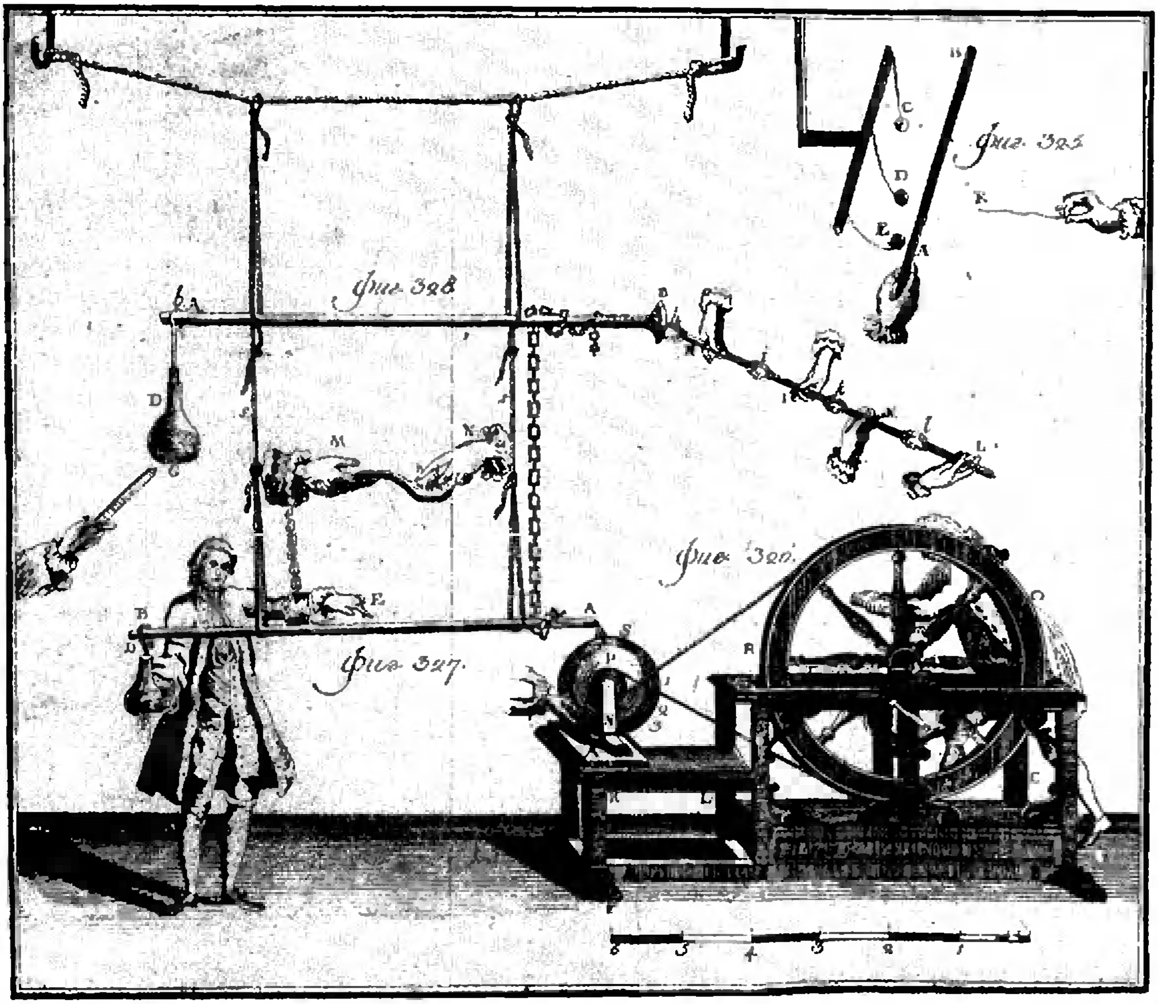


Рисунок из учебника М.Бриссона

природу во всех ее проявлениях, тщательно описывает свойства явлений и, если может, их объясняет, причем среди объяснений всегда лучшее то, которое учитывает все наблюдаемые свойства. В мире еще много неизведанного, замечает Бриссон, и то, что нам удалось объяснить, — лишь малая часть всего многообразия природы.

К началу XIX века в физике был накоплен огромный опытный материал, позволявший создавать более или менее стройные теории отдельных явлений. На очереди стоял вопрос о связи различных свойств природы. Оставалось всего несколько лет до классических опытов Эрстеда, доказавших связь постоянного тока с магнетизмом, и работ Юнга и Френеля, убедительно продемонстрировавших превосходство волновой теории света. Физика не стояла на месте и динамично развивалась, а потому была популярной и увлекательной наукой для студентов. Здесь многое зависело от преподавателей, от возможностей университета. Посмотрим, как выглядел Московский университет в 1800-е годы.

Москва в то время бурлила яркими всполохами красочной, разноцветной, привольной жизни. Зеленели сады, блестели новенькие дворцы, выезжали золоченые кареты последних русских бояр и вельмож, опальных фаворитов, доживавших свой век в Москве. Нигде не умели так веселиться, как здесь, не было людей радушнее и хлебосольнее, чем москвичи этого первого десятилетия XIX века, — вспоминали современники. Каждый день — маскарады, балы, праздники, обеды, где неприглашенных гостей было больше, чем приглашенных. Простой народ развлекался на гуляньях по престольным праздникам: неизменные медвежьи забавы и кулачные бои напоминали о патриархальной старине.

Московский университет неотделим от этой веселой Москвы, его студенты предпочитают посещать не лекции, а кофейные дома. Однако важные изменения происходят во внутренней жизни университета. Его попечителем становится М.Н.Муравьев — наставник юного Александра I и отец двух декабристов, писатель и поэт, открывший русский сентиментализм, идеалист-мечтатель, добрый, честный и благородный человек. Муравьев задумал произвести переворот в российском народном просвещении. Он пишет новый устав университета, где дарует ему все свободы и управление по образцу лучших университетов Германии, учреждает систему народных училищ — от приходских школ до гимназий по всей России. Мечта Муравьева — ввести Московский университет на равных в семью лучших европейских высших школ, куда сейчас отправляются способные русские студенты. «Может быть, со временем, приедут шведы учиться в Москве!» — воскликнул он.

Под благотворным влиянием Муравьева университет оживает. Сюда по приглашениям попечителя приезжают талантливые ученые из Европы, возвращаются и становятся профессорами студенты, учившиеся за границей, пробуждаются старые профессора. Университет объявляет о чтении публичных лекций, на которые приходит просвещенная московская публика всех сословий. Пожалуй, самые любимые у нее лекции по физике — их читает профессор Петр Иванович Страхов (тот самый, что перевел Бриссона). Здесь можно встретить известных московских литераторов: Карамзина, Дмитриева, Жуковского, самых богатых аристократов и прелестных барышень. «Редко когда увидишь человека статного без принуждения, величавого без напыщенности, красивого без притязания и вежливого без манерности. Сам вид его внушал уважение», — так характеризовал Страхова один из его слушателей. Страхова любили за его красноречие (в молодости он ездил учиться ему в Германию и во Францию), за его приятный голос.

Летом 1805 года любимец Москвы Страхов развлек свою публику следующим интересным опытом: он сумел пропустить электрический ток через Москву-реку в районе Крымского брода. Об этом сообщалось в заметке, напечатанной в первом номере «Журнала общества испытателей природы» (на французском языке). Автор заметки — знаток античных древностей Н.Ф.Кошанский, будущий учитель Пушкина в Царскосельском лицее. Вот еще один пример, показывающий сколь тесно были связаны поколения и люди в то время. Опыт Страхова настолько занимателен, что стоит привести его подробное описание.

«Господин Страхов с несколькими из своих учеников устроил гальванический прибор следующим образом.

В один из погожих дней, в 4 часа после обеда, он велел положить на обоих берегах реки в 10 саженях от моста сухие деревянные доски, и на одном из них были установлены Вольтовые столбики, представляющие из себя небольшие цинковые и медные пластинки размером с двухкопеечные монеты или маленькие диски в один дюйм 5 линий диаметром (38,1 мм). Два столбика были соединены дугооб-

Рисунок из учебника М.Бриссона

разным медным проводником. На конце одного из столбиков был другой медный проводник, к которому прикрепили железную проволоку, отведенную по перилам моста на другой берег реки на расстоянии 100 саженей. (Здесь следует заметить, что перила моста были выкрашены масляной краской, что изолировало железную проволоку.) Этот конец цепи был опущен в маленький сосуд, наполненный водой с раствором соли аммиака и поставленный также на хорошо изолированные сухие доски. Половина гальванической цепи была тем самым установлена наиболее точным образом. Но так как следовало дополнить всю цепь, при посредстве реки, то поставили другой столбик, контактирующий с водой железной проволокой длиной в 6 – 7 саженей, изолированной от стола до воды при помощи положенных для этого сухих палок.

Так же сделали и на другом берегу реки, чтобы закончить цепь, замыкавшуюся другим сосудом, наполненным также раствором аммиака и поставленным на те же доски рядом с первым. Закончив эти приготовления, начали опыты. При погружении рук в каждый из сосудов, испытывали одновременно небольшие гальванические толчки, похожие на толчки от электрического тока. Гальванический ток, который мог быть ощутим, следовательно, с одной стороны, шел по изолированной железной проволоке, по перилам моста, с другой стороны, он проходил через воду реки на протяжении приблизительно 70 саженей.

Возникло довольно примечательное побочное явление: те же толчки, правда, немного менее сильные, ощущались при погружении пальца в сосуд, куда входил проводник, находящийся вне воды, хотя цепь не дополнялась другой рукой; но этот опыт не давал никакого эффекта, когда палец опускался в другой сосуд, осуществлявший соединение цепи посредством реки.

Все присутствовавшие ученики испытали то же самое, повторяя этот опыт. Мы были в большом затруднении, не находя причины этого явления, но господин профессор был так добр, что объяснил нам его происхождение; и мы в самом деле поняли, что прибрежный песок, будучи влажным, служил проводником гальваническому току — и он заметил нам, что наши руки, смоченные солью аммиака, были достаточно чувствительны, чтобы испытать действие выделяемого тока. Это замечание подтвердилось и тем, что любопытные, которых было множество, дотрагиваясь до цепи на мосту, ощущали то же действие и говорили с удивлением друг другу: «Не дотрагивайтесь, вас обожжет как порохом».

Многие описания современников свидетельствуют о том, что Страхов был как талантливым преподавателем, так и неутомимым и страстным экспериментатором. Каждый день он проводил какие-нибудь исследования и опыты. Так, постоянным предметом его исследований было «определение силы и порядка действований стужи при замерзаниях и застываниях жидкостей». Каждую зиму у Страхова замораживалась вода в чугунных бомбах, отверстия в которых затыкались пробками, сухими или смазанными салом, или деревянными гвоздями, которые иногда обматывались вместе с бомбами железной проволокой. Когда морозы бывали крепкие и выставленная на улицу вода в бомбах быстро замерзала, то сухие пробки сами собою выбивались вон с более или менее сильным звуком, похожим на выстрел, причем взлетали кверху так, что перебрасывались через двухаршинную стену маленькой обсерватории; сухие деревянные гвозди, даже привязанные проволокой, также выбивались «силою стужи», и проволока вся разрывалась, а вода, в таком случае, выступала из отверстия и торчала ледяным шипом, более или менее длинным — смотря по степени мороза. Наоборот, пробки и гвозди, смазанные салом, почти всегда не уступали напряжению замерзавшей воды, и она распирала во все стороны и разрывала бомбу на два, на три черепка, а ледяной шар ее оказывался внутри с дуплом, усыпанным длинными ледяными кристалликами призматической формы и расположенными в разных направлениях, но похожих во многих опытах. Профессор, стараясь определить закон в их расположении, каждый раз зарисовывал их и сохранял рисунки для сопоставления.

Особенный интерес у профессора вызывали явления атмосферного электричества — гроза и молнии, попадающие в какие-нибудь предметы на земле. Лишь только он узнавал об очередном ударе грома, сразу же ехал на место удара, опрашивал свидетелей, изучал следы молнии. В то время многие полагали, что проводником громового разряда между небом и землей является дождевая вода. Страхов усомнился в этой теории: во время своих наблюдений он видел, что попавшая в железную крышу молния дальше спускается до земли скорее по сухим железным частям, чем по влажным. Это позволило ему сделать вывод, что вода — не лучший проводник электричества.

Свои основные теоретические представления П.И.Страхов изложил в изданной им в 1810 году книге «Краткое начертание физики». Это был первый университетский учебник физики, написанный русским профессором, с учетом опыта прочитанных им лекций. Эта книга дает нам возможность познакомиться с содержанием лекций, которые читал Страхов в университете. Но главным достоинством его лекций, из-за которого их любили студенты и старались не пропускать ни одной, были прекрасные демонстрационные опыты. В его распоряжении находился богатый физический кабинет, собранный с помощью попечителя Муравьева. К сожалению, почти все это оборудование не удалось вывезти из Москвы в сентябре 1812 года перед вступлением наполеоновских войск. Среди спасенных вещей (возможно, некоторые из них сохранились и по сей день) — машина Атвуда для демонстрации свободного равноускоренного падения тел, снаряд Паскаля, показывающий давление воды, насосы и колокола, создающие безвоздушное пространство, телескоп, микроскопы, зеркала, камера-обскура, гальванические приборы.

Профессор Страхов оставался при университете до последнего дня перед занятием Москвы. Он был тяжело болен, и когда университет, спасаясь от французов, переехал в Нижний Новгород, его сердце не выдержало — в начале 1813 года он умер.

Личность П.И.Страхова (к сожалению, ныне совершенно забытого) еще долго оставалась легендарной среди работавших в университете. Значение Страхова для истории университета действительно велико. По-существу это был первый русский профессор, поднявший преподавание физики в России на уровень, близкий к мировому, и сам постоянно искавший собственные пути в науке.

Морские границы

Возникновение войн, как правило, имеет своей причиной желание установить новые границы стран, такие, которые нападающая сторона считает более справедливыми. В ход идут ссылки на исторические факты, на интересы нации, на защиту части населения другой страны. Каких только аргументов в пользу изменения границ не было за многовековую историю человечества, сопровождавшуюся постоянными войнами! Мы же рассмотрим более спокойную ситуацию. Два государства решили на карте провести морскую границу, поскольку их берега омываются одним морем. В этом случае нет рек, хребтов и других естественных разграничителей, поэтому порешили исходить из принципа: каждая точка границы должна быть одинаково удалена как от одной страны, как и от другой.

Проведем фундаментальные исследования на эту тему. Фундаментальные исследования, как известно, начинаются с рассмотрения простейших случаев. Случай первый: берега у обоих стран прямолинейные (рис.1).

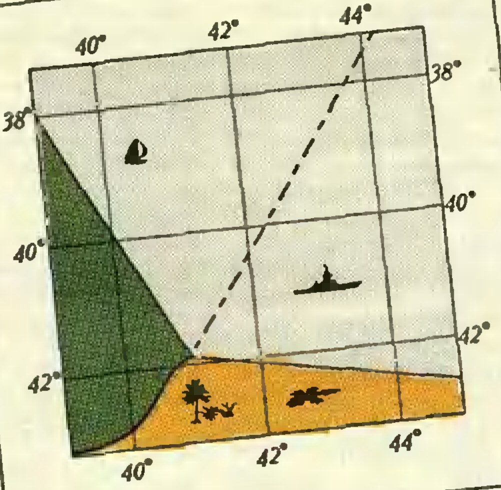


Рис. 1

В этом случае из свойств биссектрисы угла получаем, что морской границей будет именно биссектриса угла между берегами. Отметим, что это — действительно фундаментальный факт. Он позволяет установить приемлемые морские границы для любых конфигураций берега. Для этого достаточно приблизить береговую линию ломаной, а затем провести биссектрисы углов, составленных парами отрезков из береговых линий стран, как это сделано на рисунке 2.

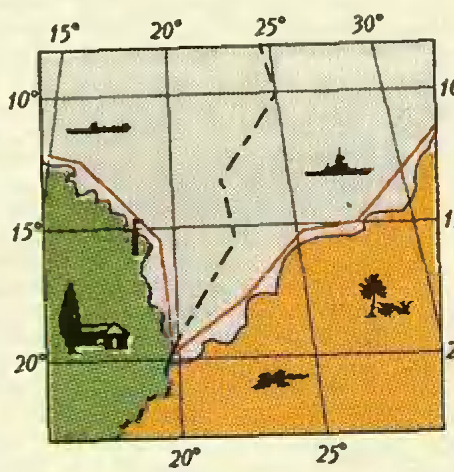


Рис. 2

Довольно впечатляющий пример пользы фундаментальных исследований! Но представим себе, что одно из государств — крошечный островок. В этом случае приближение ломаными неэффективно. Продолжим наши фундаментальные исследования и рассмотрим случай второй: одна страна — точка, а другая — полуплоскость (рис.3). Разумеется, математики уже давно (со времен древних греков) выяснили, какая кривая является геометрическим местом точек, равноудаленных от данной точки и данной прямой. Эта кривая — парабола, та самая парабола, которая является графи-

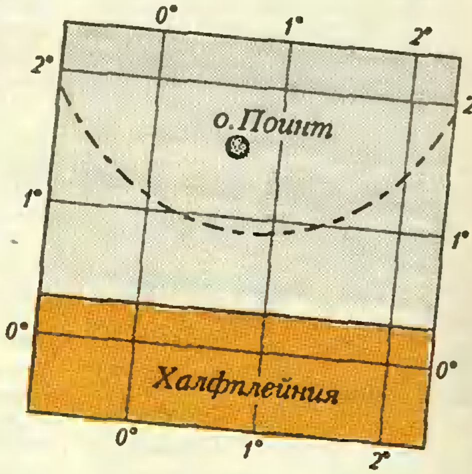


Рис. 3

ком квадратного трехчлен $y = ax^2 + bx + c$. Заданные точка и прямая тоже имеют свои названия: точка называется *фокусом* параболы, а прямая — ее *директрисой*.

Теперь можно проводить морские границы в том случае, если страны имеют небольшие острова, например, как на рисунке 4.

Рис. 4

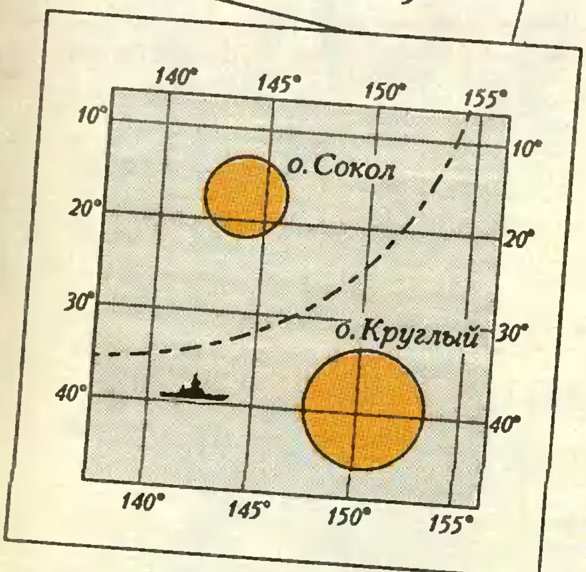


Рис. 6

Случай наличия больших островов ничем не отличается от континентального случая. А граница между двумя точечными островами является срединным перпендикуляром к соединяющему их отрезку.

Ну а если остров не очень маленький, но круглый? Как в этом случае разграничить море между ним и страной с прямолинейным берегом? Нетрудно понять, что и в этом случае граница будет параболой. Ее фокус находится в центре круга, а директрисой является прямая, параллельная береговой линии второй страны и отстоящая от нее на расстояние, равное радиусу заданного круга (рис.5).

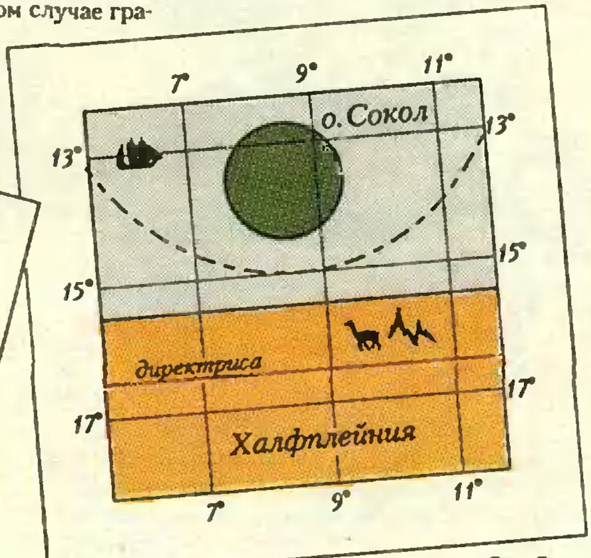


Рис. 5

Чтобы завершить рассказ о фундаментальных результатах в этой области, осталось отметить, что в третьем случае, когда проводится морская граница между двумя круглыми островами, мы получаем геометрическое место точек, равноотстоящих от двух окружностей, т.е. множество точек, разность расстояний которых от центров этих окружностей постоянна и равна разности их радиусов. Такая кривая называется гиперболой. Она изображена на рисунке 6.

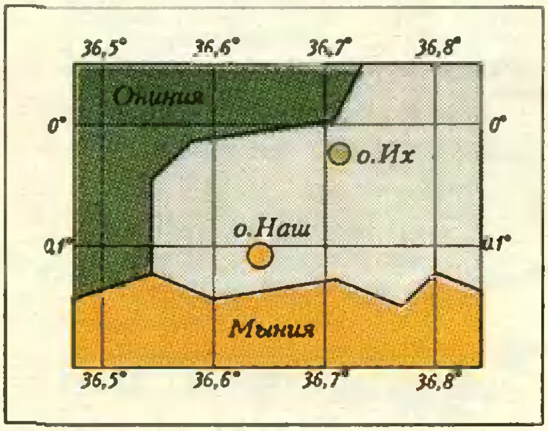


Рис. 7

А теперь, во всеоружии фундаментальных знаний, проведите морскую границу на карте, изображенной на рисунке 7.

А.Савин

Задачи

1. По окончании волейбольного турнира, в котором каждая команда встречалась с каждой из остальных по два раза, оказалось, что 20% команд не имели в своем активе ни одной победы (ничьих в волейболе не бывает). Сколько всего встреч было проведено в этом турнире?
С.Манвелов

2. Число КУБ является кубом целого числа, а число БУК — простое. Какие это числа?
Н.Антонович

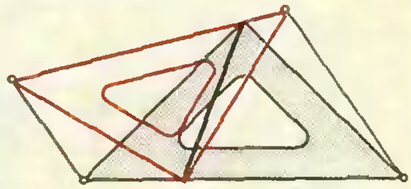
3. «Одна из моих бабушек, — рассказывает Оксана, — старше другой ровно на 1 год, а ее муж, мой дедушка, старше второго дедушки тоже ровно на 1 год, но это не самое удивительное. Интересно то, что произведение возрастов дедушек равно четырехзначному числу, первые две цифры которого составляют возраст моей молодой бабушки, а вторые — возраст другой моей бабушки. Сколько им лет?»
П.Филевич

4. Замените буквы цифрами так, чтобы равенство

ФАКТ+ФАКТ=НАУКА

стало верным. Одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, разным — разные.
И.Красин

5. Два чертежных равнобедренных угольника положили один на другой так, что вершины прямых углов оказались на гипотенузах (см. рисунок). Рассмотрим четырехугольник с вершинами в вершинах острых углов. Докажите, что отрезок, соединяющий прямые углы угольников, делит площадь указанного четырехугольника пополам.
В.Произволов



«Сказка — ложь, да в ней намек...»

С. ТИХОМИРОВА

ВСЕ мы в детстве с удовольствием читаем сказки. В них мы погружаемся в волшебный мир, где животные и птицы разговаривают по-человечьи, где в смертельной схватке сходятся благородство и низкая злоба, простодушие и коварство, где герои могут мгновенно перенестись в «тридевятое царство — тридесятое государство». Созданные авторами, чьи имена в большинстве своем затерялись в глубине времен, отшлифованные десятками и сотнями поколений рассказчиков, сказки несут в себе заряд мудрости и доброты, столь необходимый людям.

Читая сказки, мы порой не обращаем должного внимания на встречающиеся там описания различных природных явлений, в том числе и физических.

А они, между тем, играют немаловажную роль: тот, кто знает законы природы, нередко торжествует победу, а кто не знает — терпит поражение. В одних сказках физические явления представлены точно и правдиво, в других имеет место явное поэтическое преувеличение, фантазия автора.

В сказках разных народов часто встречаются схожие или даже одинаковые, так называемые «бродячие» сюжеты. Что касается физических «ситуаций», то это прежде всего различные проявления трения и инерции, изменение свойств материалов в зависимости от температуры, световые и звуковые эффекты. Вот — несколько примеров.

Прочитайте приведенные здесь небольшие отрывки из различных сказок и попытайтесь ответить на физические вопросы, сформулированные после каждого отрывка.

1. Легенда о Тылвале (*ительменская сказка*)

«Жил Тылвал с сестрой. Жили они на Круглой сопке. Долго там жили. Тылвал, когда ждал врагов, сопку зимой водой поливал. В одном месте был у него подъем, там он врагов поджидал.»

С какой целью Тылвал поливал сопку водой?

2. Небесный барашек (*финская сказка*)

«Пришел знахарь в замок королевскую дочь ле-

чить и видит, что Смерть у нее в изголовье сидит. Тут бы ему от затеи отступиться, раз такое дело, но очень уж хочется королевскую награду получить, и решил знахарь попробовать. Велел он сделать такой помост, чтобы на оси крутился, положил на него королевну и стал крутить, да так быстро, что Смерть не удержалась в изголовье у девушки и свалилась на пол.»

Объясните случившееся.

3. Настоящая дружба (*ассирийская сказка*)

«На середине реки он приподнял собаку и вместе с камнем бросил в реку. От резкого движения лодка опрокинулась, и хозяин очутился тоже в воде. Его тяжелая одежда намокла, и он стал тонуть.»

Почему опрокинулась лодка?

4. Мальчик и раджа (*индонезийская сказка*)

«Тогда раджа приказал:

— А теперь покажи, где верхний, а где нижний конец у обрубка черного дерева.

Мальчик взял обрубок, оглядел его со всех сторон, подержал в руках и опустил в воду.

— Господин, верхний конец тот, который над водой, — сказал он радже.»

Как объяснить ответ мальчика?

5. Лиса, аист, лев и мул (*арабская сказка*)

«Лев ждал-ждал, устал, нашел горлышко от разбитого кувшина и положил его возле норы. Когда дул ветер, воздух проходил через это горлышко, и получался такой звук, как будто рычал лев. Лиса сидела в норе три дня, боялась льва. Горлышко кувшина гремит, а она думает, что это лев рычит.»

Какое физическое явление можно узнать в этом эпизоде?

6. Как пытали каменную плиту (*китайская сказка*)

«У мальчика, торговавшего пончиками, украли

деньги. Для разоблачения вора судья Бао-гун приказал притащить большой чан с водой.

Потом каждому велел монету в чан бросить, сам рядом стоит, смотрит ... Вот подошел какой-то человек, монету в чан бросил. Смотрит Бао-гун: на воде кружочки жира плавают. Как закричит судья:

— Это ты, пес, у ребенка деньги украл? Признавайся!

Испугался вор...»

Как объяснить происходящее? Почему жировые пятна на воде круглые?

7. Гадкий утенок (*сказка Х.К.Андерсена*)

«Кота она звала сыночком; он умел выгибать спинку, мурлыкать и даже испускать искры, если его гладили против шерсти.»

Почему кот «испускал искры» при поглаживании?

8. Снежная королева (*сказка Х.К.Андерсена*)

«Герда начала читать «Отче наш»; было так холодно, что дыхание девочки сейчас же превращалось в густой туман.»

Почему, когда холодно, заметно образование тумана при дыхании, а когда тепло — нет?

9. Морской царь и Василиса Премудрая (*русская сказка*)

«А Иван-царевич отправился в подводное царство;

видит – и там свет такой же, как у нас, и там поля, и луга, и рощи зеленые, и солнышко греет.»

А греет ли солнышко под водой?

10. Морозко (*русская сказка*)

«Девушка сидит под елью, дрожит, озноб ее пробирает. Вдруг слышит – невдалеке Морозко по елкам потрескивает, с елки на елку поскакивает, пощелкивает. Очутился на той ели, под которой девица сидит, и сверху ее спрашивает:

– Тепло ли тебе, девица?

– Тепло, Морозушко, тепло, батюшка.»

Почему от мороза ель потрескивает?

11. Как ходжа тащил из колодца месяц (*турецкая сказка*)

«Однажды поздно вечером ходжа при свете луны поднимал ведро из колодца; и увидел он, что в колодец упал месяц. Чтобы вытащить месяц, он привязал к веревке крюк и спустился вниз.

Случайно крючок зацепился за камень; и, когда ходжа сильно тянул веревку, крючок сорвался, а ходжа упал на спину.

Он взглянул наверх и увидел, что месяц на небе.

– Ну, слава богу, помучился я немало, но зато месяц теперь вернулся на свое место.»

Какое физическое явление ввело в заблуждение ходжу?

12. Жена Гоба (*ирландская сказка*)

«Каждой избраннице старик задавал три вопроса, чтобы проверить и оценить ее ум.

Как отличить верхний конец ободранного ивового прутика от нижнего, если сам прутик всего двенадцати дюймов в длину и с обоих концов одинаковой *толщины «на глаз»?*

... И только одна-единственная девушка, мудрая и остроумная, ответила на все три вопроса. Она-то и стала женой Гоба.

Она распознала концы прутика, бросив его в реку: нижний, более тяжелый конец, лег по течению, а верхний, более легкий, смотрел в обратную сторону.»

Как объяснить способ, придуманный девушкой?


C
A
B

О задаче Мальфатти

В.БЕЛЕНЬКИЙ, А.ЗАСЛАВСКИЙ

Однажды летом в деревне за вечерней беседой мы придумали задачу, постановка которой была очень простой и, как показалось вначале, решение тоже не должно было вызвать особых затруднений. Однако нам потребовалась целая неделя, чтобы справиться с ее решением. Оно оказалось столь изящным, что мы захотели познакомить с ним читателей «Кванта».

Позже мы узнали, что столкнулись с некогда знаменитой, а сейчас почти забытой задачей итальянского математика Мальфатти, опубликованной еще в 1803 году. Вот эта задача.

Дан треугольник ABC. Требуется построить три окружности так, чтобы каждая из них касалась двух других окружностей и двух сторон треугольника (см. рис. 1).

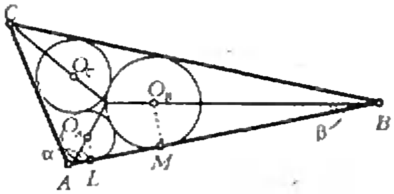


Рис. 1

Немного истории

Сам Мальфатти опубликовал алгебраическое решение этой задачи без доказательства, сообщив лишь, что полученные им формулы являются результатом весьма сложных и громоздких вычислений.

В 1826 году чисто геометрическое решение задачи Мальфатти (и тоже без доказательства) дал Я.Штейнер — один из крупнейших геометров прошлого века. Затем к ней возвращались не раз. В частности, в 1874 году Шретер дал доказательство решения Штейнера.[1]

Из публикаций нашего времени отметим подробное решение задачи Мальфатти в книге Д.О.Шклярского, Н.Н.Ченцова и И.М.Яглома «Избранные задачи и теоремы математики», ч. 2 (планиметрия).

Впрочем, занимаясь этой задачей на отдыхе, в отрыве от книг и библиотек, мы всего этого, к счастью, не знали. И вот что мы придумали.

Первый этап. Редукция к системе уравнений

В треугольнике ABC на рисунке 1 круги с центрами O_A, O_B и O_C и радиусами r_A, r_B, r_C соответственно удовлетворяют условию задачи.

Существование и единственность решения следуют из очевидных соображений непрерывности. Будем считать, например, круг с центром O_A ведущим, а два других подстраивать под него, вписывая их в углы B и C так, чтобы они касались ведущего. Сначала придадим радиусу r_A максимально возможное значение, при котором круг становится вписанным в треугольник ABC, при этом круги с центрами O_B и O_C разъединены и их радиусы минимальны. Теперь, как в мультфильме, будем постепенно уменьшать r_A, приближая центр O_A к вершине A; тогда центры O_B и O_C других кругов будут удаляться от своих вершин, двигаясь вдоль биссектрис, а их радиусы будут увеличиваться, т.е. эти круги будут двигаться, сближаясь друг с другом и расширяясь. Ясно, что в какой-то момент они придут в соприкосновение, и этот момент определяется однозначно.

Однако найти радиусы кругов в общем случае не так просто. Чтобы читатель сразу осознал нетривиальность решения, приведем наш ответ. Радиус круга с центром O_A дается формулой

$$r_A = \frac{S}{p-a}\sin^2(\psi/2-\varphi_a); \qquad (1)$$

здесь, как обычно, S и $p=(a+b+c)/2$ — площадь и полупериметр данного треугольника со сторонами a, b и c, а $\psi=\varphi_a+\varphi_b+\varphi_c$ — полупериметр сферического треугольника, составленного из дуг больших кругов, равных (в радианном измерении) $2\varphi_a$, $2\varphi_b$, $2\varphi_c$, где

$$\varphi_a = \arcsin\sqrt{a/p},$$
$$\varphi_b = \arcsin\sqrt{b/p}, \qquad (2)$$
$$\varphi_c = \arcsin\sqrt{c/p}.$$

(Отметим, что $S/(p-a)$ — это радиус окружности, вневписанной в угол A треугольника ABC.)

Выразим условие касания кругов, примыкающих к одной из сторон, например, к стороне $AB=c$ (рис. 1). Пусть L и M — точки касания кругов с центрами O_A и O_B с этой стороной. Тогда $LM=2\sqrt{r_Ar_B}$.

Упражнение 1. Докажите это.

Так как $AB=AL+LM+MB$, получаем соотношение (α и β — половины углов A и B соответственно)

$$r_A\operatorname{ctg}\alpha + 2\sqrt{r_Ar_B} + r_B\operatorname{ctg}\beta = c. \qquad (\bullet)$$

Введем положительные переменные

$$u=\sqrt{r_A\operatorname{ctg}\alpha}, \quad v=\sqrt{r_B\operatorname{ctg}\beta}.$$

Тогда условие ($\bullet$) перепишется в виде

$$u^2+2uv\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}+v^2=c. \qquad (\bullet\bullet)$$

Из рисунка 2 видно, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{r}{p-a}, \quad \operatorname{tg}\beta=\frac{r}{p-b}.$$

Вспоминая еще формулы для площади треугольника: $S=rp$, где r радиус вписанного круга, и

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(формула Герона), находим

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{r^2}{(p-a)(p-b)}=$$
$$=\frac{S^2}{p^2(p-a)(p-b)}=\frac{p-c}{p}.$$

После подстановки в уравнение ($\bullet\bullet$), окончательно получаем

$$u^2+2uv\sqrt{1-\frac{c}{p}}+v^2=c.$$

Введя еще обозначение $w=\sqrt{r_c\operatorname{ctg}\gamma}$, где γ — половина угла C, и записывая аналогичные уравнения для сторон b и c, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} u^2+2uv\sqrt{1-\frac{c}{p}}+v^2=c, \\ v^2+2vw\sqrt{1-\frac{a}{p}}+w^2=a, \\ w^2+2wu\sqrt{1-\frac{b}{p}}+u^2=b \end{cases} \qquad (3)$$

с тремя неизвестными u, v, w.

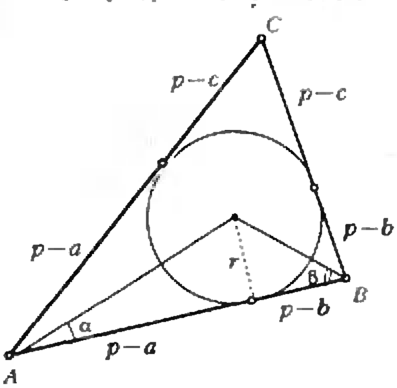


Рис. 2

[1] *Эти сведения получены из замечательной книги А.Адлера «Теория геометрических построений», изданной в 1924 году в Одессе издательством «Mathesis».*

Этим заканчивается *первый этап* решения. Исходная геометрическая задача сведена к алгебраической системе (3), имеющей симметричную циклическую форму. Но как решать эту систему? Прямыми методами, «в лоб», может быть и удастся пробиться, но уж очень громоздко...

Второй этап. Назад к геометрии

Рассмотрим числа u, v, w как длины некоторых отрезков.

Если еще правые части уравнений заменить квадратами «отрезков» длины $c_\bullet = \sqrt{c}$, $a_\bullet = \sqrt{a}$, $b_\bullet = \sqrt{b}$, то каждое уравнение будет выглядеть как «теорема косинусов» для некоторого треугольника. Сформулируем по этому поводу простую лемму:

Лемма 1. *Для того, чтобы из трех отрезков x, y, z можно было составить треугольник, необходимо и достаточно, чтобы они были связаны соотношением*

$$x^2 - 2qxy + y^2 = z^2,$$

в котором коэффициент q удовлетворяет условию

$$|q| < 1.$$

При этом угол θ, противолежащий стороне z, будет равен $\theta = \arccos q$.

Упражнение 2. Докажите эту лемму.

Итак, вернемся к нашей системе, которая выглядит теперь так:

$$\begin{cases} u^2 + 2uv\sqrt{1 - \dfrac{c}{p}} + v^2 = c_\bullet^2, \\ v^2 + 2vw\sqrt{1 - \dfrac{a}{p}} + w^2 = a_\bullet^2, \\ w^2 + 2wu\sqrt{1 - \dfrac{b}{p}} + u^2 = b_\bullet^2. \end{cases} \qquad (3')$$

Если (u, v, w) — ее положительное решение, то первое уравнение задает треугольник Δ_c со сторонами u, v, $c_\bullet = \sqrt{c}$ и тупым углом, противолежащим стороне $\sqrt{c}$, равным

$$\theta_c = \arccos\left(-\sqrt{1 - c/p}\right) = \pi - \varphi_c,$$

где $\varphi_c = \arccos\sqrt{1 - c/p} = \arcsin\sqrt{c/p}$ (поскольку $\sin^2\varphi_c + \cos^2\varphi_c = 1$).

По теореме синусов, радиус круга, описанного около треугольника Δ_c, равен

$$R = c_\bullet/2\sin\theta_c = \sqrt{p}/2. \qquad (4)$$

Аналогично определяются треугольники Δ_a и Δ_b, задаваемые вторым и третьим уравнениями системы (3'), и углы $\theta_a = \pi - \varphi_a$, $\theta_b = \pi - \varphi_b$. Замечательно, что R не зависит от c. Так что мы доказали следующую основную для дальнейшего лемму:

Лемма 2. *Радиусы описанных окружностей всех трех треугольников Δ_a, Δ_b, Δ_c равны $R = \sqrt{p}/2$.*

Упражнения

3. Докажите, что отрезки с длинами $a_\bullet = \sqrt{a}$, $b_\bullet = \sqrt{b}$, $c_\bullet = \sqrt{c}$ всегда образуют остроугольный треугольник Δ.

4. Докажите, что $\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c < \pi$, а $\theta_a + \theta_b + \theta_c > 2\pi$, и следовательно, из треугольников Δ, Δ_a, Δ_b, Δ_c нельзя сложить тетраэдр.

На этом заканчивается *второй этап* решения.

Третий, заключительный этап

По лемме 2, все три треугольника Δ_a, Δ_b, Δ_c могут быть вписаны в круг радиусом $R = \sqrt{p}/2$, и мы будем рассматривать все отрезки — u, v, w, $a_\bullet$, $b_\bullet$, $c_\bullet$ как хорды этого круга. Заменим их соответствующими дугами $\hat u$, $\hat v$, $\hat w$, $\hat a_\bullet$, $\hat b_\bullet$, $\hat c_\bullet$. Под дугой, соответствующей хорде x, мы понимаем *меньшую* из дуг, стягиваемых этой хордой. Пусть $\hat x$ — угловая мера такой дуги. Тогда, очевидно, $x = 2R\sin\frac{\hat x}{2}$, а $\hat x = 2\arcsin\frac{x}{2R}$. Вписывая тупоугольные треугольники Δ_a, Δ_b, Δ_c в круг с радиусом R, увидим, что

$$\begin{aligned} \hat u + \hat v &= \hat c_\bullet = 2\varphi_c, \\ \hat v + \hat w &= \hat a_\bullet = 2\varphi_a, \\ \hat w + \hat u &= \hat b_\bullet = 2\varphi_b. \end{aligned} \qquad (5)$$

Итак, от системы квадратных уравнений (3) введением новых переменных $\hat u$, $\hat v$, $\hat w$ мы перешли к системе линейных уравнений!

Замечание. В соотношениях (5) мы уверенно пишем знак +, поскольку треугольник Δ_c — тупоугольный с тупым углом $\theta_c = \pi - \varphi_c$ против стороны $c_\bullet$ (рис. 3).

Сложив эти три уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} \hat u &= \psi - \hat a_\bullet, \\ \hat v &= \psi - \hat b_\bullet, \\ \hat w &= \psi - \hat c_\bullet, \end{aligned} \qquad (6)$$

где $\psi = \varphi_a + \varphi_b + \varphi_c$ — «полупериметр» «треугольника», составленного из дуг $\hat a_\bullet$, $\hat b_\bullet$, $\hat c_\bullet$.

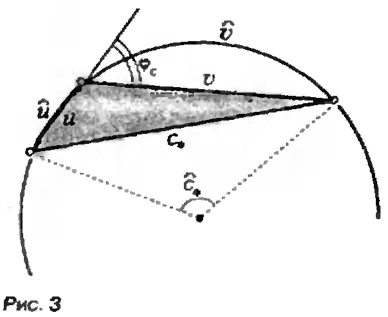


Рис. 3

Осталось записать ответ. Имеем:

$$u = 2R\sin\frac{\hat u}{2} = \sqrt{p}\sin\frac{\hat u}{2},$$

но тогда $r_A = u^2\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{pr}{p-a}\sin^2\dfrac{\hat u}{2}$, т.е.

$$\begin{aligned} r_A &= \frac{S}{p-a}\sin^2\frac{\psi - \hat a_\bullet}{2}, \\ r_B &= \frac{S}{p-a}\sin^2\frac{\psi - \hat b_\bullet}{2}, \\ r_C &= \frac{S}{p-c}\sin^2\frac{\psi - \hat c_\bullet}{2}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Напомним, что здесь $\hat a_\bullet/2$, $\hat b_\bullet/2$, $\hat c_\bullet/2$ — это арксинусы $\sqrt{a/p}$, $\sqrt{b/p}$, $\sqrt{c/p}$; ψ — их сумма.

Итак, мы решили систему (3). Однако исходная задача была сформулирована как задача на построение. Что же, полученные формулы (7) позволяют построить отрезки r_A, r_B и r_C циркулем и линейкой.

Единственное, что здесь может вызвать сомнение — это появление в наших формулах таких величин, как $\sqrt{a}$, $\sqrt{p}$. Однако его нетрудно рассеять. Достаточно взять произвольный отрезок e в качестве единицы длины. Тогда $a_\bullet = \sqrt{ae}$, $p_\bullet = \sqrt{pe}$, $R = p_\bullet/2$ будут уже настоящими отрезками (а угловые величины дуг — арксинусы их отношений — уже не зависят от выбора единичного отрезка e).

Упражнение 5. Опишите построение отрезков с помощью циркуля и линейки по формулам (7).

Конечно, от формул (7) можно перейти к обычным алгебраическим формулам, содержащим вместо тригонометрических функций довольно громоздкие радикалы.

Упражнение 6 (для любителей алгебры). Напишите такие выражения и попробуйте проверить, что они дают решение системы (3). (Конечно, зная ответ, можно попробовать решить систему (3) чисто алгебраически и прийти к этим формулам.)

Вместо «лобового» построения отрезков r_A, r_B, r_C по формулам можно предложить и более изящное. Вспомним геометрическую интерпретацию решения (6) линейной системы трех уравнений (5) (рис. 2): треугольник с длинами сторон a, b, c, величины $p-a$, $p-b$, $p-c$ — это отрезки сторон от вершин до точек касания со вписанной окружностью[2]. Этот факт, основанный только на соображениях симметрии, верен и для криволинейного «треугольника», стороны которого $\hat a_\bullet$, $\hat b_\bullet$, $\hat c_\bullet$ — дуги одного радиуса; на этом основано следующее построение (рис. 4).

[2] *Насколько такая замена помогает в алгебре, рассказывалось недавно в заметке Р. Алексеева и Л. Курляндчика «Стороны треугольника», «Квант», № 9/10, 1993.*

Пусть на сторонах $a_\bullet$, $b_\bullet$, $c_\bullet$ треугольника $\Delta = A_\bullet B_\bullet C_\bullet$, как на хордах, построены сегменты с радиусами $R = \sqrt{p/2}$, обращенные внутрь Δ; O_a, O_b, O_c — центры соответствующих кругов. Тогда центр Q описанного круга треугольника $O_aO_bO_c$ будет также центром «вписанного» круга, касающегося дуг сегментов (в точках T_a, T_b, T_c, лежащих на пересечение дуг с отрезками QO_a, QO_b, QO_c), а расстояния от этих точек касания до концов дуг равны u, v, w:

$$A_\bullet T_b = A_\bullet T_c = u,$$
$$B_\bullet T_a = B_\bullet T_c = v, \qquad (8)$$
$$C_\bullet T_b = C_\bullet T_a = w.$$

Упражнение 7. Докажите правильность этого построения и его осуществимость (т.е. факт, что Q лежит вне секторов $O_cA_\bullet B_\bullet$, $O_aB_\bullet C_\bullet$, $O_bA_\bullet C_\bullet$).

Стереометрическая интерпретация и новые вопросы

Можно пойти дальше: выйти в пространство и составить из трех секторов рисунка 4, сведя их центры O_a, O_b, O_c в одну точку O, трехгранный угол — тогда три дуги секторов станут сторонами криволинейного треугольника Δ, лежащего на сфере радиусом R с центром O; при этом их точки T_a, T_b, T_c будут точками касания вписанного в Δ круга (рис. 5). Если вершины $\hat{\Delta}$ обозначить, как и на рисунке 3, через $A_\bullet$, $B_\bullet$ и $C_\bullet$, то будут по-прежнему верны равенства (8).

Разумеется, углы секторов на рисунке 4, как и плоские углы трехгранного угла с вершиной O, равны $\angle A_\bullet OB_\bullet = 2\varphi_c$, $\angle B_\bullet OC_\bullet = 2\varphi_a$, $\angle C_\bullet OA_\bullet = 2\varphi_b$.

Упражнение 8. Докажите, что каждый из трех углов φ_a, φ_b, φ_c меньше суммы двух других и, значит (с учетом упражнения 4) из углов $2\varphi_a$, $2\varphi_b$, $2\varphi_c$ можно составить трехгранный угол.

Теперь мы объяснили слова «сферический треугольник», появившиеся в ответе (1), (2), анонсированном в начале статьи.

На этом можно было бы поставить точку. Но, оказывается, в сферической интерпретации можно обнаружить более глубокие связи с системой уравнений (3) и породившей ее «задачей Мальфатти». Мы ограничимся здесь некоторыми наблюдениями и оставляем читателям возможность подумать над ними, не формулируя точных теорем и упражнений (тем более, что некоторые из поставленных вопросов далеко не просты).

Заметим, что плоскости построенного нами трехгранного угла с центром O делят сферу на 8 треугольников: один из них — это наш $\Delta = A_\bullet B_\bullet C_\bullet$, три других примыкают к нему по сторонам (а еще четыре симметричны относительно точки O). Расстояния от точек касания вписанной окружности до вершин на соответствующих сторонах по дугам равны $\hat{u} = \psi - \hat{a}_\bullet$, $\hat{v} = \psi - \hat{b}_\bullet$, $\hat{w} = \psi - \hat{c}_\bullet$, а соответствующие им расстояния «по хордам» дают, как мы знаем, тройку (u, v, w) положительных решений системы (3). Легко найти и «дуговые» расстояния от вершин $A_\bullet$, $B_\bullet$, $C_\bullet$ до точек касания с окружностями, вписанными в три соседние с $\hat{\Delta}$ треугольника (подобно тому, как находятся расстояния от вершин обычного треугольника с точками касания вневписанных окружностей, рис. 6): *они составляют три тройки* $\left(\psi, \psi - \hat{a}_\bullet, \psi - \hat{b}_\bullet\right)$, $\left(\varphi - \hat{c}_\bullet, \psi, \psi - \hat{a}_\bullet\right)$, $\left(\psi - \hat{b}_\bullet, \psi - \hat{c}_\bullet, \psi\right)$.

Вернемся к системе уравнений (3). Она может иметь максимум 8 решений; оказывается, они действительно существуют, причем, кроме (u, v, w), еще три решения имеют вид

$$(-z, u, v),\ (w, -z, u),\ (v, w, -z), \qquad (9)$$

где $\hat{z} = \psi$, т.е. соответствуют тройкам расстояний «по хордам» до точек касания — только расстояние до «далекой» точки z берется со знаком минус (а еще четыре решения получаются из этих сменой знаков).

Не правда ли, в формулах (9) заложена впечатляющая циклическая симметрия! Можно ли заподозрить что-либо подобное в такой, например, системе

$$\begin{cases} u^2 + \frac{6}{7} \cdot uv + v^2 = 40, \\ v^2 + \frac{4}{7} \cdot vw + w^2 = 45, \\ w^2 + \frac{12}{7} \cdot wu + u^2 = 13? \end{cases}$$

(Проверьте, что она имеет канонический вид (3), или попытайтесь решить ее, не применяя нашего метода. Кстати, стороны треугольника ABC на рисунке 1 примерно соответствуют правым частям этой системы.)

Заметим здесь, что наш метод может быть применен к системе вида (3), в которой параметр *p не обязан быть полупериметром*, а может быть произвольным числом, при котором система имеет смысл, т.е. $p > \max(a, b, c)$; в свою очередь, *правые части не обязаны быть сторонами треугольника*. (Если все же p — полупериметр, то выполняется соотношение $\cos^2\varphi_a + \cos^2\varphi_b + \cos^2\varphi_c = 1$, которое означает, что φ_a, φ_b, φ_c можно рассматривать как углы, образованные некоторым вектором в пространстве с *осями* декартовой системы координат. Мы эту возможность не использовали, но может быть она открывает какие-то новые подходы.)

Но и это еще не все! Каждое из решений (9), оказывается, тоже имеет интерпретацию в терминах исходной задачи Мальфатти. В первоначальном ее понимании мы подразумевали, что круги лежат внутри треугольника и, если считать

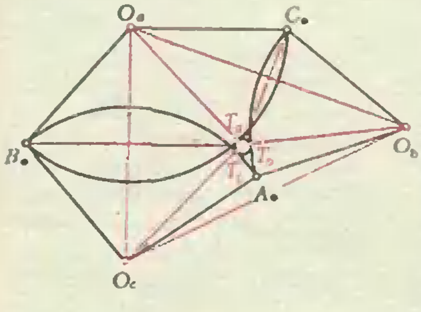


Рис. 4

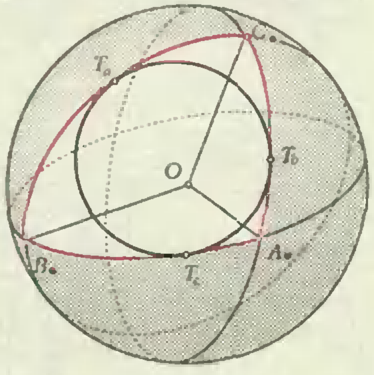


Рис. 5

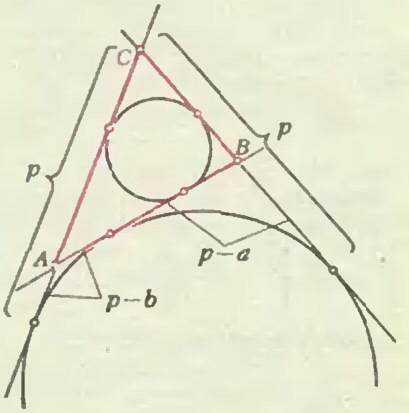
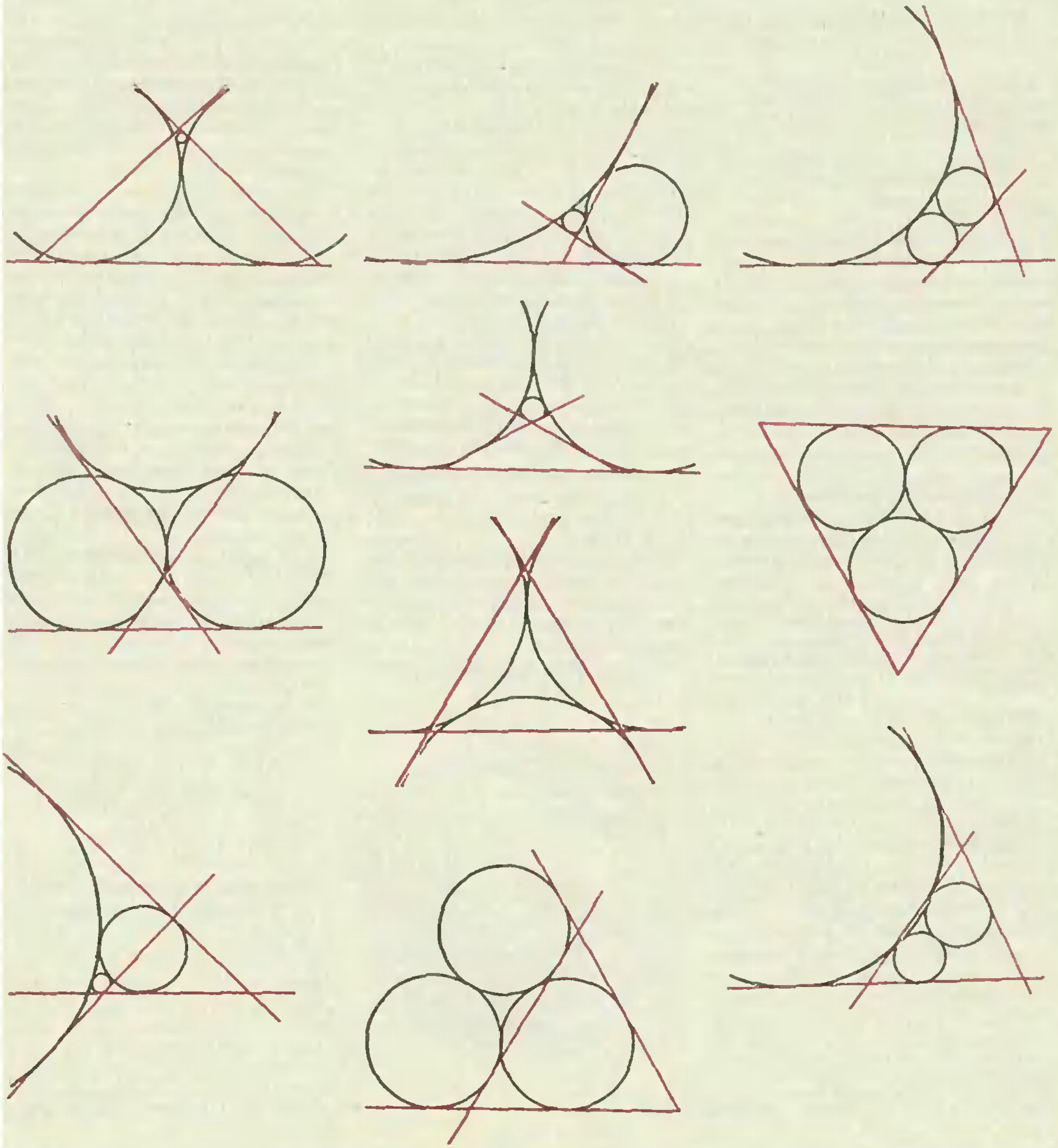


Рис. 6

их обращенными «лицом к вершинам», касаются друг друга «затылками». Но можно рассмотреть и случай, когда (касаясь тех же сторон или их продолжений) круги касаются друг друга «лбами»; и оказывается, что для вычисления их радиусов в этом случае нужны как раз «побочные» решения (9) системы (3). (При этом в соотношении (*), с которого начался вывод уравнения (**) системы, некоторые отрезки надо брать со знаком минус.)

Впрочем, «задача Мальфатти» в самом общем виде: *найти тройку кругов, в которой каждая пара касается друг друга и одной из трех данных прямых*, — имеет значительно больше решений, так что для их описания понадобиться не одна, а несколько систем, подобных (3). Попробуйте выяснить, сколько же всего решений у этой задачи, как их разумно расклассифицировать. Мы попросили художницу «Кванта» построить на компьютере столько различных схем расположения этих кругов, сколько сможет поместиться на оставшейся части страницы, — но все ли случаи здесь показаны, решать вам.

Подумайте над всем прочитанным. Поиграйте этим «камешком», подобно алмазу переливающимся при различных поворотах цветами геометрии, алгебры, топологии, комбинаторики... Желаем успеха, надеемся, что наша задача вам понравилась. Авторы будут рады получить письма с размышлениями по ее поводу.



ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

Биссектрисы треугольника. Вписанная окружность

1. В треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке A_1. Докажите, что $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA}{AC}$.

2. Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, $\angle BAC = \alpha$. Докажите, что $\angle BIC = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

3. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается AB и AC в точках M и K. Докажите, что $AM=AK=p-a$, где p — полупериметр треугольника, $BC=a$.

4. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D, I — центр вписанной в ABC окружности. Докажите, что $DB=DC=DI$.

5. Две стороны треугольника равны a и b, угол между ними α. Докажите, что длина биссектрисы, заключенной между данными сторонами, равна $\frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a+b}$.

6. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AD и CD равны, $AB=a$, $BC=b$. Окружности, вписанные в треугольники ABD и CBD, касаются BD в точках K и M. Найдите KM.

7. Вершины треугольника делят описанную окружность на три дуги. Докажите, что три окружности, каждая из которых имеет центром середину одной из этих дуг и проходит через две вершины треугольника, имеют общую точку.

8. В окружность вписан шестиугольник $ABCDEF$, у которого $AB=BC$, $CD=DE$, $EF=FA$. Докажите, что диагонали этого шестиугольника, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

9. В треугольнике один угол равен 60°, а другой равен 70°. Найдите углы треугольника OIH, где O — центр описанной около исходного треугольника окружности, I — центр вписанной окружности, H — точка пересечения высот.

Указание. Докажите, что окружность, описанная около треугольника OIH, проходит через две вершины данного треугольника.

10. Пусть O — центр описанной около треугольника ABC окружности, A_1 — основание высоты, проведенной к стороне BC. Докажите, что биссектриса угла A треугольника ABC является также и биссектрисой угла A_1AO.

11. Стороны треугольника равны a, b и c. В каком отношении центр вписанной в этот треугольник окружности делит биссектрису к стороне c?

12. В треугольнике ABC угол A равен 70°, а угол B равен 80°. Внутри треугольника взята точка M так, что $\angle AMB = 105°$, $\angle BMC = 125°$. Найдите $\angle MBA$.

13. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA_1. На стороне AB взята точка K так, что $BK = BA_1$, а на продолжении стороны AC за вершину C взята точка M так, что $CM = CA_1$. Докажите подобие треугольников AKA_1 и AA_1M. Докажите, что из этого подобия следует равенство $AA_1^2 = AK \cdot AM$.

Исходя из последнего равенства, докажите следующую формулу для длины биссектрисы:

$$AA_1^2 = AB \cdot AC - BA_1 \cdot CA_1.$$

14. Докажите, что в любом треугольнике имеет место неравенство $R \geq 2r$, где R и r соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

15. Пусть R и r радиусы описанной и вписанной окружностей некоторого треугольника, d — расстояние между центрами этих окружностей. Докажите *формулу Эйлера* $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Указание. Рассмотрим треугольник ABC, в котором I — центр вписанной окружности, а биссектриса угла A пересекает описанную окружность в точке D. Выразите отрезки AI и ID через R, r и угол A треугольника. (Для отрезка ID воспользуйтесь утверждением задачи 4.) Затем докажите, что $AI \cdot ID = R^2 - d^2$.

16. Пусть M — произвольная точка окружности, описанной около треугольника ABC, отличная от его вершин. Докажите, что прямые, симметричные AM, BM и CM относительно биссектрис углов A, B и C соответственно, параллельны.

17. На плоскости дана окружность. Рассмотрим треугольник, для которого эта окружность является вписанной. Найдите геометрическое место вершин таких треугольников, соответствующих

а) наименьшему углу треугольника;

б) среднему по величине углу;

в) наибольшему углу треугольника.

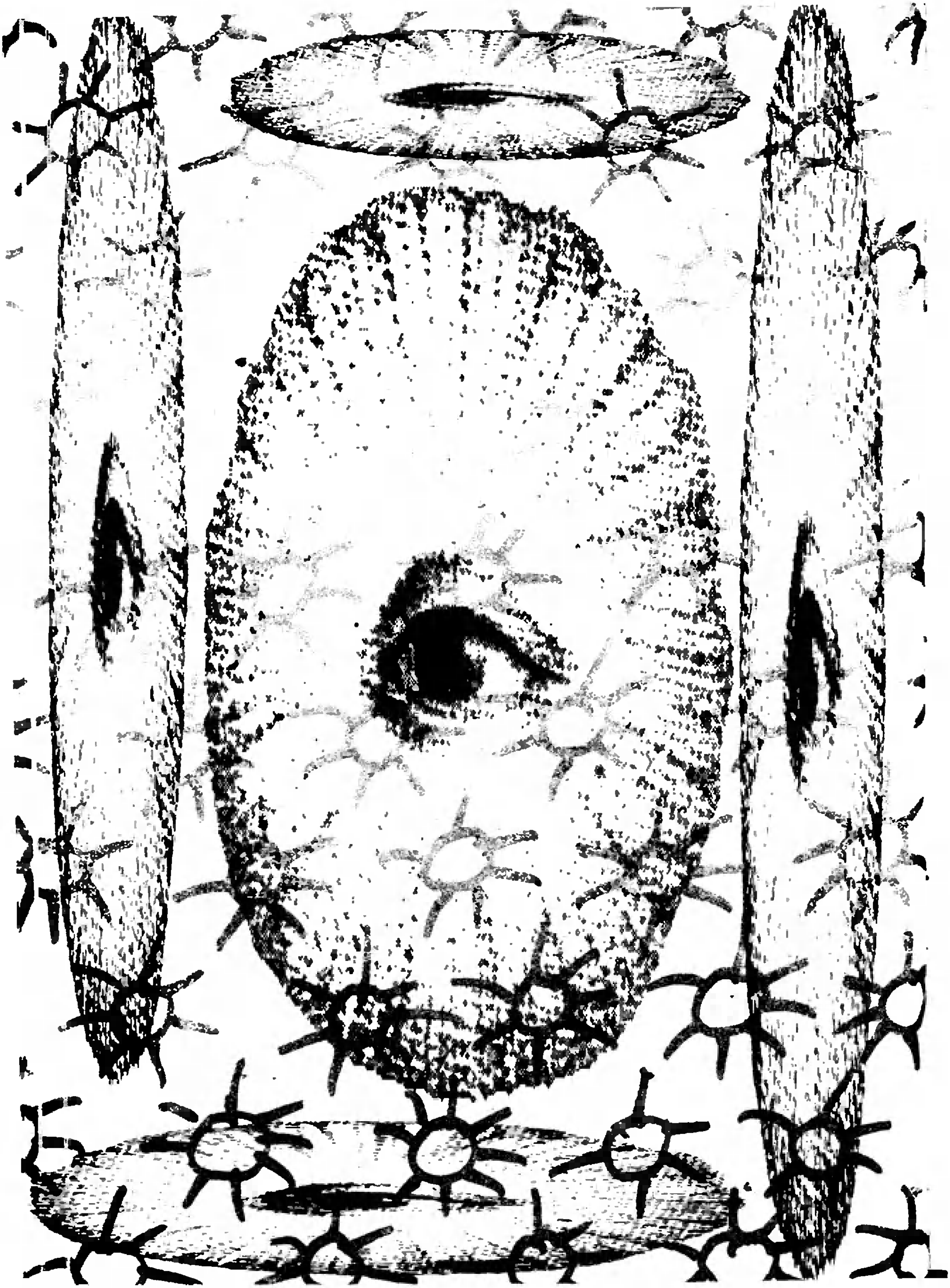
18. Окружность с радиусом r вписана в треугольник ABC и касается AB, BC и CA соответственно в точках K, P и M. Через P проведен диаметр PD. Известно, что $\angle BDC = 90°$, $BC=a$. Найдите отрезки AK и AM.

19. Три окружности радиусами r имеют общую точку. Каждая из них касается двух сторон треугольника. Радиус описанной около этого треугольника окружности равен R. Найдите радиус вписанной в него окружности.

20. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA и DAB, являются вершинами прямоугольника.

21. Докажите, что если у треугольника равны две биссектрисы, то этот треугольник равнобедренный (*теорема Штейнера – Лемуса*).

И.Шарыгин



Корпускулярные свойства света

В.МОЖАЕВ

При выводе закона распределения энергии в спектре излучения абсолютно черного тела М.Планк в 1900 году высказал чуждую классической физике гипотезу о том, что излучение (и поглощение) света атомами происходит не непрерывно, а дискретными порциями – квантами. Планк принял, что энергия кванта определяется выражением

$$E = h\nu,$$

где ν – частота излучения, а h – некоторая постоянная величина, получившая впоследствии название постоянной Планка. По современным данным $h = 6{,}626176 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Развивая теорию квантов, А.Эйнштейн в 1905 году пришел к представлению о том, что и при распространении в пространстве свет ведет себя подобно совокупности каких-то частиц, энергия которых определяется формулой Планка. Такие частицы получили название квантов света, или фотонов.

Про фотон известно многое. Его масса покоя равна нулю (во всяком случае современные опытные данные позволяют утверждать, что масса покоя фотона меньше величины $4 \cdot 10^{-21} m_e$, где m_e – масса покоя электрона), а скорость равна скорости света. Если фотон обладает энергией, то он должен обладать и импульсом. Связь между энергией и импульсом легко найти из соотношений

$$E = mc^2,\ p = mc,$$

где m – релятивистская масса фотона, c – скорость света. В результате получаем

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}.$$

Одно из явлений, подтверждающих гипотезу фотонов, – это фотоэлектрический эффект, открытый Г.Герцем в 1887 году. Количественная теория фотоэффекта была построена Эйнштейном в 1905 году. А опыты А.Комптона по рассеянию рентгеновских лучей наглядно подтвердили, что фотоны подчиняются тем же механическим законам, что и частицы вещества.

Теперь – несколько конкретных задач.

Задача 1. *Катод вакуумного фотоэлемента (рис. 1) освещается светом с частотой $\nu = 10^{15}$ Гц и мощностью излучения $P = 0{,}41$ Вт. Если при постоянных интенсивности и частоте падающего света менять напряжение между анодом и катодом (по величине и по знаку), то зависимость фототока I от напряжения U будет иметь вид, изображенный на рисунке 2.*

Определите по этому графику работу выхода для материала фотокатода (анод выполнен из того же материала). Найдите также вероятность выбивания электрона из катода отдельным фотоном.

При освещении фотокатода светом происходит взаимодействие квантов света с электронами вещества, причем в случае внешнего фотоэффекта (как в этой задаче) речь идет об электронах проводимости, которые расположены в поверхностном слое катода. Во время столкновения фотона с одним из таких электронов энергия фотона $h\nu$ полностью передается электрону, и если этой дополнительной энергии будет достаточно, электрон сможет покинуть поверхность фотокатода.

Максимальная кинетическая энергия E_k фотоэлектрона определяется уравнением Эйнштейна для фотоэффекта

$$E_k = h\nu - A,$$

где A – работа выхода электрона с поверхности освещаемого вещества в вакуум. Если энергия фотона больше работы выхода, то даже при нулевой разности потенциалов между катодом и анодом часть фотоэлектронов достигает анода и в замкнутой цепи фотоэлемента течет ток. При отрицательной разности потенциалов между анодом и катодом (на аноде «–», а на катоде «+») количество фотоэлектронов, достигающих анода, уменьшается. Очевидно, что фототок станет равным нулю, если задерживающая разность потенциалов между анодом и катодом будет равна

$$U_з = \frac{E_k}{e},\ \text{или}\ E_k = U_з e,$$

где e – заряд электрона. Подставив это выражение в уравнение Эйнштейна, получим

$$A = h\nu - U_з e.$$

Из графика находим, что в нашем случае $U_з = -0{,}3$ В. Работу выхода обычно выражают в электрон-вольтах: 1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж, поэтому окончательно

$$A = 3{,}84\ \text{эВ}.$$

При попадании фотонов в вещество катода не каждый фотон вырывает электрон. Очевидно, что вероятность такого события η равна отношению числа электронов N_e, вылетающих из катода в единицу времени, к числу фотонов $N_ф$, падающих на поверхность катода за то же время:

$$\eta = N_e / N_ф.$$

Число фотонов $N_ф$ задается мощностью падающего излучения:

$$N_ф = \frac{P}{h\nu} \approx 6{,}2 \cdot 10^{17}\ \text{с}^{-1}.$$

А количество электронов N_e определяется величиной фототока насыщения

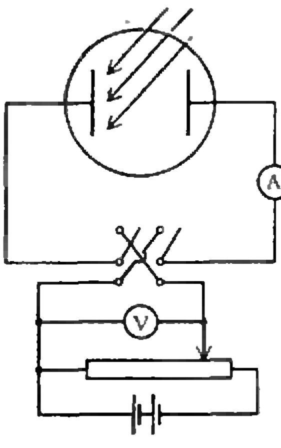


Рис. 1

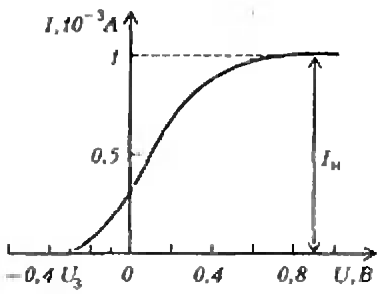


Рис. 2

$I_н$ (равного 10^{-3} А), поскольку в этом случае все покидающие катод электроны достигают анода:

$$N_e = \frac{I_н}{e} \approx 6{,}2\cdot 10^{15}\ \text{с}^{-1}.$$

Тогда вероятность фотоэффекта

$$\eta = N_e/N_\Phi = 10^{-2}.$$

Задача 2. *Световой поток через небольшое отверстие сечением $\sigma_1 = 2$ мм^2 попадает внутрь полости, имеющей площадь поверхности $S = 5$ см^2 (рис.3). Стенки полости небольшую часть света поглощают, а остальную рассеивают. Внутри полости создается равномерно распределенное по всем направлениям (изотропное) излучение. Из второго отверстия, сечение которого $\sigma_2 = \sigma_1$, выходит $n = 0{,}2$ светового потока, попадающего на входное отверстие. Чему равен коэффициент поглощения стенок полости?*

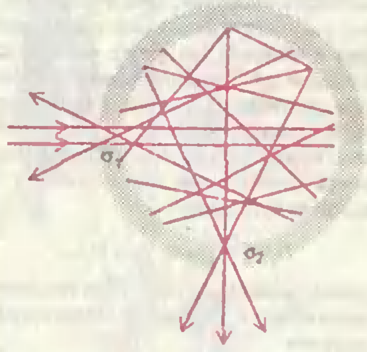


Рис. 3

В задаче речь идет, естественно, об установившемся режиме (стационарном состоянии), когда плотность энергии светового излучения внутри полости постоянна. Заметим кстати, что такая полость является хорошей моделью абсолютно черного тела.

Обозначим энергию излучения, попадающего на единицу площади поверхности полости в единицу времени, через E. Тогда через отверстия выходит световой поток $\Phi_1 = 2\sigma E$, а стенками поглощается поток $\Phi_2 = (S - 2\sigma)\beta E$, где β — искомый коэффициент поглощения стенок полости. Из условия энергетического баланса найдем поток Φ, поступающий в камеру за единицу времени:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 2\sigma E + (S - 2\sigma)\beta E.$$

По условию задачи поток, выходящий из второго отверстия, составляет n-ю часть от поступающего потока:

$$\sigma E = n\Phi.$$

Из совместного решения последних двух уравнений получаем

$$\beta = \frac{(1-2n)\sigma}{n(S-2\sigma)} \approx 0{,}012.$$

Задача 3. *Узкий пучок импульсного лазерного излучения с энергией $E = 0{,}4$ Дж и длительностью $\tau = 10^{-9}$ с падает на собирающую линзу параллельно ее главной оптической оси OO' (рис.4). Расстояние от пучка до оси численно равно фокусному расстоянию F линзы. Найдите величину средней силы, действующей на линзу со стороны света, если половина энергии лазерного излучения поглощается в линзе. Отражением от поверхностей линзы пренебречь.*

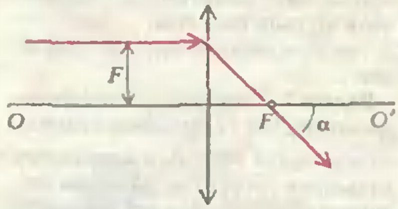


Рис.4

Сила, действующая на линзу при прохождении через нее лазерного излучения, равна изменению импульса линзы в единицу времени:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}_л}{\Delta t}.$$

Будем рассматривать замкнутую систему «лазерное излучение — линза». Импульс этой системы до прохождения света через линзу, очевидно, равен импульсу лазерного излучения, который направлен вдоль оптической оси линзы, а его модуль составляет

$$p_{c1} = E/c.$$

После преломления в линзе световой пучок проходит через задний фокус линзы и распространяется под углом $\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$ (рис.5). Выходящий пучок обладает энергией $0{,}5E$ (с учетом потерь в линзе), а его импульс $\vec{p}_{c2}$ направлен под углом α к горизонту и численно равен

$$p_{c2} = 0{,}5E/c.$$

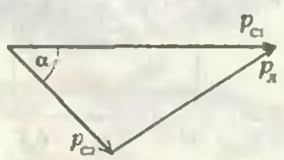


Рис.5

По закону сохранения импульса для замкнутой системы импульс, полученный линзой, будет равен

$$\vec{p}_л = \vec{p}_{c1} - \vec{p}_{c2},$$

$$p_л = \sqrt{p_{c1}^2 + p_{c2}^2 - 2p_{c1}p_{c2}\cos\alpha}.$$

Первоначальный импульс линзы был равен нулю, поэтому изменение импульса равно приобретенному импульсу $\vec{p}_л$. Это изменение произошло за время τ, следовательно, средняя сила, подействовавшая на линзу, будет равна

$$F = \frac{\Delta p_л}{\Delta t} = \frac{p_л}{\tau} = \frac{1}{\tau}\sqrt{p_{c1}^2 + p_{c2}^2 - 2p_{c1}p_{c2}\cos\alpha} \approx$$

$$\approx 0{,}7\frac{E}{c\tau} \approx 1\ \text{Н}.$$

Задача 4. *Нейтральная частица π-мезон распадается на лету на два одинаковых γ-кванта (фотоны с большой энергией). Угол разлета между γ-квантами составляет $\theta = 174°$. Определите скорость π-мезона перед распадом. Рассмотрите нерелятивистский случай, когда скорость частицы много меньше скорости света.*

В микромире так же, как и в макромире, для замкнутых систем остаются справедливыми законы сохранения энергии и импульса. Воспользуемся ими.

До распада π-мезона его полная энергия включала в себя энергию покоя $m_\pi c^2$ и кинетическую энергию движения $m_\pi v^2/2$, где m_π — масса покоя частицы, а v — ее скорость. После распада π-мезона возникают два γ-кванта. Пусть энергия каждого кванта равна E_γ. Тогда закон сохранения энергии можно записать в виде

$$m_\pi c^2 + \frac{m_\pi v^2}{2} = 2E_\gamma.$$

Закон сохранения импульса (векторная «модель» которого изображена на рисунке 6) позволяет получить второе уравнение:

Рис.6

$$m_e v = 2\frac{E_\gamma}{c}\cos\frac{\theta}{2}.$$

Исключая из этих уравнений E_γ, получим квадратное уравнение относительно v:

$$v^2 - 2\frac{c}{\cos(\theta/2)}v + 2c^2 = 0$$

и его решение:

$$v_{1,2} = \frac{c}{\cos(\theta/2)}\left(1 \pm \sqrt{1-2\cos^2(\theta/2)}\right).$$

Первый корень не имеет физического смысла: $v_1 > c$, так что решением задачи будет второй корень уравнения, а именно

$$v = v_2 = \frac{c}{\cos(\theta/2)}\left(\sqrt{1-2\cos^2(\theta/2)}\right) =$$

$$\approx c\cos(\theta/2) \approx 1{,}6\cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

(Здесь мы воспользовались приближением: поскольку $\cos^2\frac{\theta}{2} \ll 1$,

$$\sqrt{1-2\cos^2\frac{\theta}{2}} = 1-\cos^2\frac{\theta}{2}.)$$

Упражнения

1. На рисунке 7 приведен экспериментально полученный график зависимости задерживающей разности потенциалов $U_з$ (т.е. напряжения между катодом и анодом, при котором ток в вакуумном фотоэлементе становится равным нулю) от частоты ν падающего света. С помощью этого графика найдите значение постоянной Планка, работу выхода электрона из катода и красную границу фотоэффекта.

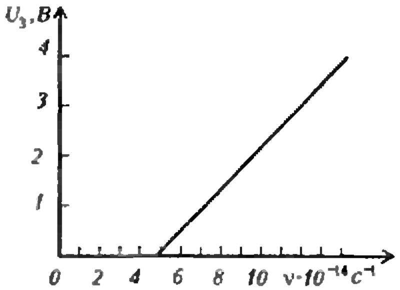


Рис. 7

2. До какого максимального потенциала зарядится уединенный медный шарик, если его облучать ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 2\cdot 10^{-7}$ м? Работа выхода электрона для меди $A = 4{,}47$ эВ, постоянная Планка $h = 6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж·с, заряд электрона $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл.

3. Узкий пучок импульсного лазерного излучения с энергией $E = 0{,}5$ Дж и длительностью $\tau = 10^{-9}$ с падает на рассеивающую линзу параллельно ее главной оптической оси. Расстояние от пучка до оси равно $F/\sqrt{3}$, где F — фокусное расстояние линзы. Найдите величину средней силы, действующей на линзу со стороны света, если половина энергии лазерного излучения поглощается в линзе. Отражением от поверхностей линзы пренебречь.

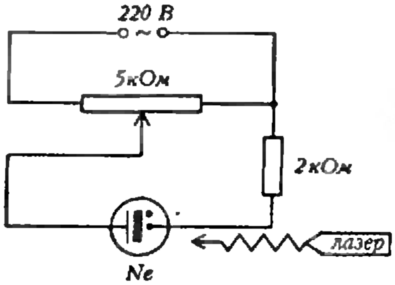
НАМ ПИШУТ

«ЗАЖИГАНИЕ»... СВЕТОМ

Предлагаем вам весьма простой и наглядный способ «генерации» света с помощью фотоэффекта.

Соберите несложную схему (см. рисунок) с миниатюрной неоновой лампочкой, у которой один электрод плоский, а другой кольцеобразный. Сначала постепенно повышайте напряжение и добейтесь появления тлеющего разряда в лампочке. Затем ненамного уменьшите напряжение так, чтобы тлеющий разряд погас.

Теперь осветите неоновую лампочку лучом от гелий-неонового лазера, направив луч нормально на ее плоский электрод, — яркое оранжевое свечение тлеющего разряда возникнет вновь.

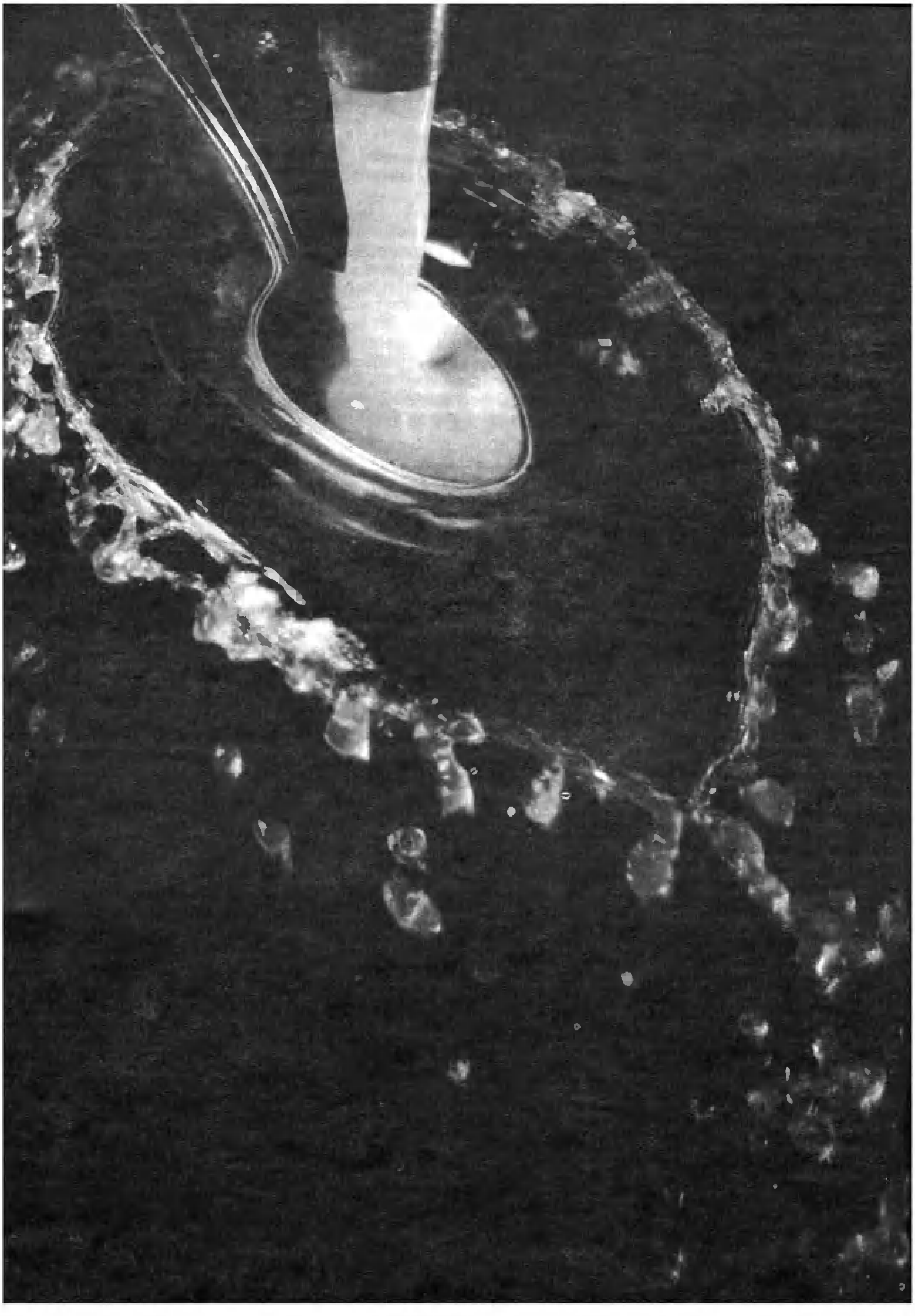


Если лазера у вас нет, не расстраивайтесь — можно использовать свет и от обычной лампы накаливания или даже просто дневной свет, то освещая им неоновую лампочку, то перекрывая его ладонью руки. Конечно, более эффектно проводить опыт все-таки с гелий-неоновым лазером, хотя это и необязательно.

В заключение — несколько практических советов. Наблюдать за разрядом лучше сбоку от нормали к плоскому электроду. Балластное ограничительное сопротивление желательно брать порядка 2 кОм — при значительно большем сопротивлении опыт может не получиться. Зажигание разряда происходит примерно при 50 — 60 В, поэтому не надо чересчур увеличивать напряжение, дабы не вывести из строя неоновую лампочку.

Желаем вам успешных опытов.

Г.Жариков



Физика в ложке воды

И.ВОРОБЬЕВ

Струя слабая и сильная

Если спрашивают: какая струя воды – слабая или сильная – быстрее заполнит ложку доверху, знайте, что в вопросе есть подвох. В очень сильной струе ложка вообще останется практически пустой, а слабая струя заполнит ложку даже чуть выше краев. Впрочем – обо всем по порядку.

Проведите опыт и вы убедитесь, что от слабой струи идет почти горизонтальная поверхность воды, которая заворачивается у края, вода по внешней поверхности стекает к середине ложки и снова образует струю (рис.1). Нижняя струя не очень устойчива – она чувствительна к месту попадания исходной струи, к наклону и чистоте ложки. Может образоваться даже несколько струй с дальнейшим распадом их на капли.

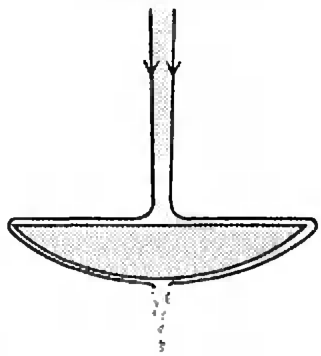


Рис. 1

Сильная же струя от места попадания растекается тонким слоем, который продолжается за края ложки изящным обширным «сводом», обрамленным снизу «бахромой» струек и капель (рис.2). Такое пленочное выплескивание в целом понятно. У падающей воды достаточно энергии, чтобы «взбежать» на край с ненулевой скоростью. А дальше в свободном полете сливающиеся водяные струйки образуют тончайшую изогнутую поверхность.

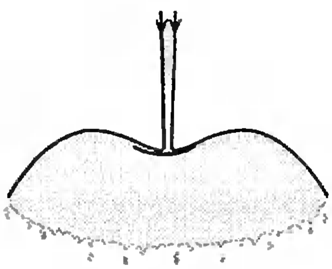


Рис. 2

Будем считать, что траектории отдельных участков воды независимы и каждая представляет собой параболу, т.е. движение происходит только под действием силы тяжести. Тогда нетрудно оценить горизонтальную скорость v на линии вершины свода (рис.3). За время полета t от края ложки до вершины смещение по горизонтали составляет $x = vt$, а по вертикали – $y = gt^2/2$. Отсюда, измерив x и y, находим скорость:

$$v = x\sqrt{\frac{g}{2y}}.$$

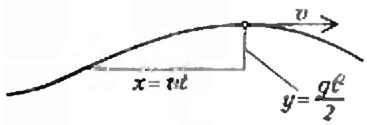


Рис. 3

В одном из типичных измерений оказалось, что x = 10 см, y = 4,5 см и $v \approx 1$ м/с.

Чтобы выяснить, существенны или нет потери энергии при ударе и трении об «опору», скорость v уместно сравнить со скоростью u в струе из крана на том же уровне, что и вершина параболы. По времени заполнения стакана (объемом около 200 мл) измерим ежесекундный объемный расход воды $q = \pi r^2 u$, где r – радиус струи. Тогда

$$u = \frac{q}{\pi r^2}.$$

В упомянутом случае получилось $u \approx 1{,}4$ м/с. Скорости не совпадают, но довольно близки. Значит, при грубых оценках потерями энергии можно пренебречь.

Теперь вернемся к слабой струе. И в этом случае при падении воды в ложку энергии заведомо хватает, чтобы вода «выскочила» из ложки, однако этого не происходит. Кто же гасит скорость почти полностью – ведь потери при ударе и трении об опору это не обеспечивают? Стоит повнимательнее рассмотреть переход от спокойного вытекания через край к пленочному выплескиванию.

Торможение о «стену»

Как показывает опыт, даже при осторожном приоткрывании крана выплескивание наступает неожиданно. Поэтому советуем не трогать кран при умеренной струе, а плавно опускать ложку вблизи дна раковины. Интересно, что результат сильно зависит от предыстории. Так, если вы добились выплескивания и подняли ложку на несколько сантиметров вверх, то вода продолжает «вылетать» за края ложки. Но как только вода заполнит ложку, для того чтобы образовался свод, мало вернуться в исходную точку – надо опустить ложку еще ниже.

Если ложка относительно мелкая, а вы достаточно внимательны, то можно добиться ситуации, когда от падающей струи почти по дну ложки идет впадина, заканчивающаяся крутой водяной стеной, за которой вода спокойна, ее поверхность горизонтальна и чуть превышает края ложки (рис.4).

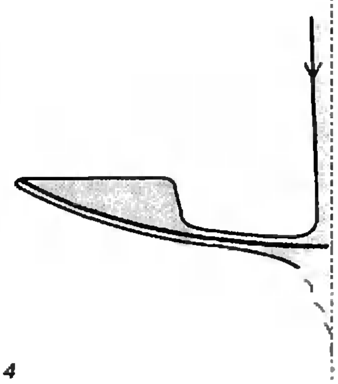


Рис. 4

Струя достаточна сильна, чтобы «сдуть» воду вблизи места встречи с ложкой, но недостаточно сильна, чтобы опустошить ложку полностью.

Ступенчатый переход от быстрого течения в тонком слое к почти неподвижной воде за крутым выступом удобнее наблюдать в случае более простого профиля дна, чем у ложки. Вполне годится, например, зеркало средних размеров с невысоким бортиком. В этом случае при усилении

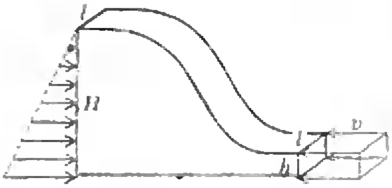


Рис. 5

или ослаблении струи просто плавно меняется радиус впадины — области быстрого растекания. Высота водяной стены H почти совпадает с высотой бортика и много больше толщины h набегающего тонкого слоя быстрой воды перед выступом (рис.5). Ее скорость v гасится в узкой области крутого подъема (где можно заметить бурление воды).

Рассмотрим объем, ограниченный вертикальными торцами Hl и hl, и применим к нему второй закон Ньютона. За единицу времени сюда со скоростью v входит масса воды ρvhl (где ρ — плотность), а на некотором расстоянии за стеной ее скорость падает почти до нуля. Таким образом, какие-то силы приводят к ежесекундному уменьшению импульса на величину ρv^2hl. Какие же?

Оказывается, это силы давления со стороны почти неподвижной воды. (Трением о дно мы пренебрегли из-за малой протяженности по горизонтали области подъема. Силы, возникающие в бурлящей на ступеньке воде, являются внутренними и на суммарный импульс не влияют. Не существенны и силы поверхностного натяжения.)

На глубине H давление превышает атмосферное на ρgH, но для расчета силы нужно взять среднее избыточное давление, тогда

$$F=\frac{\rho gH}{2}Hl=\frac{\rho gH^2l}{2}.$$

Эта тормозящая сила и равна ежесекундному уменьшению импульса. Отсюда получаем важнейшее для нас соотношение

$$v^2h=\frac{gH^2}{2}, \qquad (*)$$

которое можно рассматривать как условие неподвижности границы крутого подъема. А что произойдет, если сильнее приоткрыть кран или опустить горизонтальную опору? Тогда величина v^2h увеличится и превзойдет $gH^2/2$, водяная стена поддастся под напором быстрой воды, и ступенька начнет двигаться по направлению течения. Скорость ступеньки можно рассчитать, исходя опять же из второго закона Ньютона и сохранения массы воды. Если же водяная стена своим давлением превосходит напор быстрой воды: $gH^2/2>v^2h$, то ступенька побежит навстречу течению, и будет расширяться область почти остановившейся воды. (Так, например, подъем морской воды во время прилива «запирает» устье реки и вызывает появление крутой ступеньки, бегущей против течения реки, — так называемый бор.)

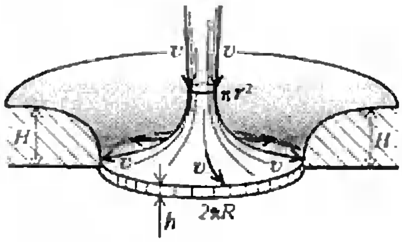


Рис. 6

Радиус растекания

В наших условиях соотношение (*) не очень удобно для количественной опытной проверки: толщина h слишком мала, трудно измерить и скорость воды v. Поэтому изберем обходной путь. Попытаемся поточнее измерить диаметр струи $2r$ в самом узком месте — «шейке» — на высоте порядка H от горизонтальной опоры и радиус кругового выступа R (рис.6). Будем также считать, что в области плавного растекания трение и небольшой перепад высот не повлияют на скорость воды.

Одно и то же количество воды проходит через «шейку» и через цилиндрическую границу с выступом, высота которой h, а длина окружности $2\pi R$. Поэтому

$$q=\pi r^2v=2\pi Rhv.$$

Отсюда (по объемному расходу) находим скорость:

$$v=\frac{q}{\pi r^2}$$

и толщину слоя растекающейся воды на расстоянии R от оси струи:

$$h=\frac{r^2}{2R}.$$

Подставляем эти значения в соотношение (*) и получаем радиус растекания:

$$R=\frac{1}{g}\left(\frac{q}{\pi rH}\right)^2.$$

По нашим измерениям при $q=52$ мл/с, $r=3{,}5$ мм и $H=6$ мм рассчитанное значение R оказалось равным 9 см, а непосредственно измеренное — 6 см. Расхождение примерно в полтора раза. Как нам представляется, это различие связано, в основном, с допущением постоянства скорости на сравнительно протяженном пути растекания в тонком слое. Если посчитать, например, что уменьшение скорости составляет 40%, то с такой поправкой получается очень неплохое количественное согласие. Надеемся, ваши опыты это тоже подтвердят.

Как ни интересно происходящее в ложке и как ни поучительно разобраться в тонкостях, связанных с влиянием профиля ее дна, «родственные» явления за краями ложки еще интереснее. Вот — лишь один пример. На быстрых горных речках неровности дна могут приводить к почти полной остановке и вздыбливанию воды. Для водного туриста встреча с таким валом очень опасна как из-за его крутизны, так и из-за резкой смены скорости течения.

Задачи LVII Московской математической олимпиады

Избранные задачи для 6—7 классов

1. Среди четырех людей нет трех с одинаковым именем, отчеством и фамилией, но у каждых двух из них совпадает имя, отчество или фамилия.

Может ли так быть?

2. Разрежьте квадрат на три части, из которых можно сложить непрямоугольный неравнобедренный треугольник.

3. Вся семья выпила по полной чашке кофе с молоком, причем Катя выпила четверть всего молока и шестую часть всего кофе.

Сколько человек в семье?

4. Среди любых десяти из шестидесяти ребят найдутся три одноклассника.

Обязательно ли среди них найдутся а) 15; б) 16 одноклассников?

5. За два года завод снизил объем выпускаемой продукции на 51%. При этом каждый год объем выпускаемой продукции снижался на одно и то же число процентов. На сколько?

6. Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько в доме этажей, если всего в нем 105 квартир?

7. Имеется много красных, желтых и зеленых кубиков размерами $1\times1\times1$. Можно ли сложить из них куб $3\times3\times3$ так, чтобы в каждом блоке $3\times1\times1$ присутствовали все три цвета?

8. В одной из школ 20 раз собирался кружок по астрономии. На каждом занятии присутствовало ровно 5 школьников, причем никакие 2 школьника не встречались на кружке больше одного раза. Докажите, что всего на кружке побывало не меньше 20 разных школьников.

Эти задачи были отобраны комиссией под руководством Д. Ботина, С. Дориченко, А. Ковальджи и И. Ященко

8 класс

1. Кооператив получает яблочный и виноградный сок в одинаковых бидонах и выпускает яблочно-виноградный напиток в одинаковых банках. Одного бидона яблочного сока хватает ровно на 6 банок напитка, а одного бидона виноградного — ровно на 10. Когда рецептуру напитка изменили, одного бидона яблочного сока стало хватать ровно на 5 банок напитка. На сколько банок напитка хватит теперь одного бидона виноградного сока? (Напиток водой не разбавляется.)

2. Ученик не заметил знак умножения между двумя трехзначными числами и написал одно шестизначное число, которое оказалось в семь раз больше их произведения. Найдите эти числа.

А. Ковальджи

3. В треугольнике ABC провели биссектрисы углов A и C. Точки P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из вершины B на эти биссектрисы. Докажите, что отрезок PQ параллелен стороне AC.

4. См. задачу М1441 из «Задачника «Кванта».

5. Придворный астролог называет момент времени хорошим, если часовая, минутная и секундная стрелки часов находятся по одну сторону от какого-нибудь диаметра циферблата. (Стрелки вращаются на общей оси и не делают скачков.) Какого времени в сутках больше, хорошего или плохого?

Д. Ботин

6. Двое играют на доске 19×94 клеток. Каждый по очереди отмечает квадрат по линиям сетки (любого возможного размера) и закрашивает его. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Дважды закрашивать клетки нельзя. Кто выиграет при правильной игре, и как надо играть?

О. Крыжановский

9 класс

1. Существует ли невыпуклый пятиугольник, никакие две из пяти диагоналей которого не имеют общих точек (кроме вершин)?

2. У Коли есть отрезок длины k, а у Левы есть отрезок длины l. Сначала Коля делит свой отрезок на три части, а потом Лева делит на три части свой отрезок. Если из получившихся шести отрезков можно сложить два треугольника, то выигрывает Лева, а если нет — Коля. Кто из играющих, в зависимости от отношения k/l, может обеспечить себе победу, и как ему следует играть?

Ю. Чеканов

3. Докажите что уравнение

$$x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3$$

имеет бесконечное число решений в целых числах x, y, z.

Н. Васильев

4. См. задачу М1442 из «Задачника «Кванта».

5. См. задачу М1445 из «Задачника «Кванта».

6. См. задачу М1447 из «Задачника «Кванта».

10 класс

1. Ученик не заметил знака умножения между двумя семизначными числами и написал одно четырнадцатизначное число, которое оказалось в три раза больше их произведения. Найдите эти числа.

А. Ковальджи

2. См. задачу М1443 из «Задачника «Кванта».

3. Каждый из 1994 депутатов парламента дал пощечину ровно одному своему коллеге. Докажите, что можно составить парламентскую комиссию из 665 человек, члены которой не выясняли отношений между собой указанным выше способом.

4. D — точка на стороне BC треугольника ABC. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности, и к ним проведена общая внешняя касательная (отличная от BC), пересекающая AD в точке K. Докажите, что длина отрезка AK не зависит от положения точки D на BC.

И. Шарыгин

5. См. задачу М1448 из «Задачника «Кванта».

6. См. задачу М1444 из «Задачника «Кванта».

11 класс

1. Придумайте многогранник, у которого нет трех граней с одинаковым числом сторон.

А. Ковальджи, Г. Кондаков

2. См. задачу 2 для 10 класса.

3. В круглый бокал, осевое сечение которого — график функции $y=x^4$, опускают вишенку — шар радиусом r. При каком наибольшем r шар коснется нижней точки дна? (Другими словами, каков максимальный радиус r круга, лежащего в области $y\ge x^4$ и содержащего начало координат?)

Н. Васильев

4. См. задачу М1446 из «Задачника «Кванта».

5. См. задачу М1449 из «Задачника «Кванта».

6. См. задачу М1450 из «Задачника «Кванта».

Избранные задачи Московской физической олимпиады

Первый тур

9 класс

1. Механическая мощность, развиваемая мотором автомобиля, начиная с момента старта линейно возрастает во времени: $N = \alpha t$. Как зависит от времени скорость автомобиля? Потерь энергии в трансмиссии нет, сопротивлением воздуха пренебречь. Масса автомобиля M.

А.Андрианов

2. На гладкой горизонтальной плоскости стоят две одинаковые гладкие горки высотой H и массой M каждая (рис.1). На вершине одной из них находится маленькая шайба массой $m \ll M$. Шайба соскальзывает без начальной скорости в направлении второй горки. Найдите скорости горок после завершения процесса всех столкновений.

М.Семенов

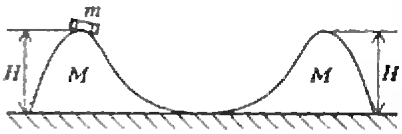


Рис. 1

3. По внутренней поверхности гладкой конической воронки, стоящей вертикально, скользят с постоянными по величине скоростями на высотах h_1 и h_2 от вершины конуса две одинаковые шайбы (рис.2). Напишите для таких шайб аналог третьего закона Кеплера, т.е. найдите отношение квадратов их периодов обращения вокруг оси конуса.

М.Семенов

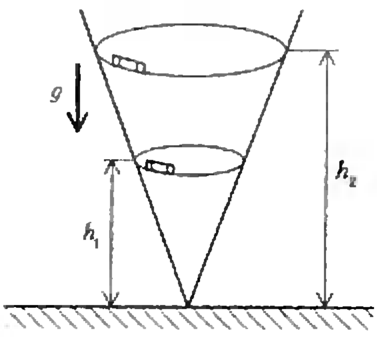


Рис. 2

10 класс

1. В кювете с вертикальными стенками в воде плавает прямоугольный брусок, одна из боковых граней которого расположена параллельно стенке кюветы на малом расстоянии d от нее (рис.3 – вид сверху). Длина грани $l \gg d$. Найдите величину и направление силы взаимодействия бруска со стенкой. Смачивание как стенки, так и бруска считайте полным. Коэффициент поверхностного натяжения воды σ, ее плотность ρ.

К.Бедов

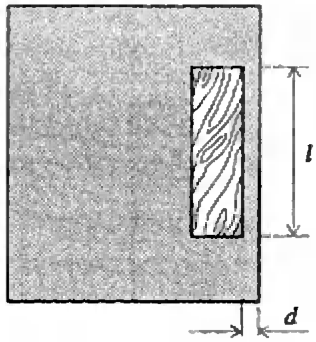


Рис. 3

2. К нижнему концу стержня, расположенного вертикально и вращающегося вокруг своей оси, прикреплена нить длиной L. На нити подвешен шарик, размеры которого малы по сравнению с длиной нити. Постройте график зависимости расстояния R между шариком и вертикальной линией, на которой расположен стержень, от угловой скорости ω вращения стержня. Считайте, что угловая скорость меняется настолько медленно, что при любом ее значении движение шарика успевает установиться.

Г.Пустовалов

3. На конце жесткого невесомого стержня длиной l, закрепленного шарнирно другим своим концом в точке O и находящегося в поле тяжести $\vec{g}$, закреплен груз массой m (рис.4). В начальный момент времени, когда груз находится в положении устойчивого равновесия, ему сообщают направленную влево скорость u, а далее раскачивают его следующим образом: когда груз останавливается, ему сообщают скорость u в плоскости рисунка перпендикулярно стержню по направлению к устойчивому положению равновесия. Чему равна полная энергия маятника через достаточно большой промежуток времени t? Потенциальная энергия отсчитывается от точки O, трение отсутствует.

О.Шведов

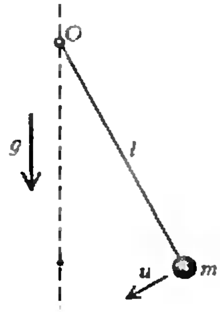


Рис. 4

11 класс

1. Маленький шарик подвешен на нити длиной l. Один раз его отклоняют на некоторый угол и сообщают ему такую скорость в горизонтальном направлении, что он начинает вращаться по окружности в горизонтальной плоскости с периодом обращения T. В другой раз шарик отклоняют на тот же угол и отпускают его без начальной скорости. Найдите максимальное отношение силы натяжения нити в первом случае к силе натяжения во втором случае.

М.Семенов

2. Если внимательно присмотреться к отражению, видимому в плоском зеркале с посеребренной задней поверхностью, то помимо основного отражения можно увидеть еще два дополнительных отражения (меньшей яркости). Как они будут располагаться относительно основного изображения?

К.Бедов

Второй тур

9 класс

1. Камень, брошенный вертикально вверх, за первую секунду полета проходит путь s. Какой путь пройдет камень за вторую секунду полета? Ускорение свободного падения g. Сопротивлением воздуха пренебречь.

А.Якута

2. Внутри сферической поверхности находится маленькая шайба. Коэффициент трения скольжения между шайбой и сферой μ, радиус сферы R. С какой угловой скоростью должны вращаться вокруг вертикальной оси сфера и неподвижная относительно нее шайба, чтобы шайба находилась на высоте $h < R$ от нижней точки сферы? Максимальную силу трения покоя считайте равной силе трения скольжения.

А.Якута

3. Горизонтальная штанга, жестко связанная с вертикальной осью OO', вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью ω (рис.5). Постоянство угловой скорости обеспечивает мотор, связанный с вертикальной осью. На штангу надета небольшая муфта

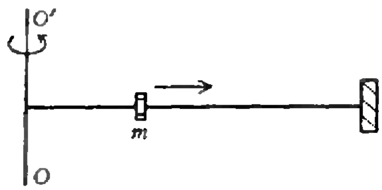


Рис. 5

массой m. Вначале муфта удерживается на расстоянии l от оси. В некоторый момент времени муфта освобождается и начинает двигаться вдоль штанги. На другом конце штанги имеется заглушка (утолщение с тонкой мягкой прокладкой), которая не позволяет соскочить муфте со штанги. Удар муфты о заглушку является абсолютно неупругим. Максимальное удаление муфты от оси равно L. Какую работу совершает мотор в процессе перемещения муфты по штанге?

В.Петерсон

10 класс

1. С какой скоростью упругий шарик должен приближаться к краю A прямоугольной ямы шириной L и глубиной H, чтобы точно попасть в ее противоположный край B (рис.6)? Стенки и дно ямы абсолютно гладкие, потерь энергии нет.

Д.Григорьев

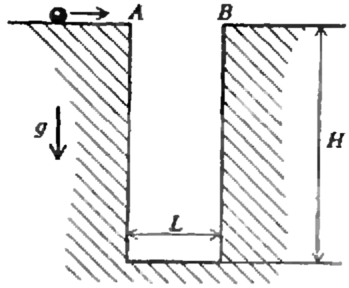


Рис. 6

2. В вертикальную стенку на одной высоте вбиты два гвоздя (рис.7). К одному гвоздю прикреплена невесомая нерастяжима нить. На нить надето маленькое кольцо. Второй конец нити перекинут через второй гвоздь. К кольцу и свободному концу нити прикреплены два одинаковых груза. Определите ускорения грузов в момент прохождения положения равновесия, если в начальном положении нить между гвоздями была горизонтальной, а начальные скорости грузов были равны нулю. Ускорение свободного падения g. Трение не учитывайте.

В.Петерсон

Рис. 7

3. В безветренный день резко ударил мороз, и поверхность озера покрылась льдом. Через сутки после похолодания толщина льда составила $d_1 = 3$ см. Строителям требуется переправить груз на противоположный берег озера, но для безопасности требуется лед толщиной не менее $d_2 = 10$ см. Через сколько дней после установления морозов можно осуществить перевозку груза, если погода не изменится?

А.Склянкин

11 класс

1. Два одинаковых бильярдных шара подвешены на одной высоте на длинных нитях, закрепленных в одной точке (рис.8). Шары разводят

Рис. 8

симметрично на расстояние, малое по сравнению с их радиусами, и отпускают, после чего наблюдаются их соударения. Вначале удары происходят через время ΔT_0, но поскольку при каждом ударе теряется энергия, частота соударений растет с течением времени. Найдите закон этого роста, считая, что коэффициент восстановления скорости шаров при ударе (постоянная величина, равная отношению относительных скоростей шаров после и до удара) равен k $(1-k \ll 1)$, и пренебрегая временем удара.

М.Семенов

2. Найдите высоту подъема жидкости у вертикальной стенки, зная краевой угол θ, коэффициент поверхностного натяжения σ и плотность жидкости ρ (рис.9). Ускорение свободного падения g.

В.Погожев

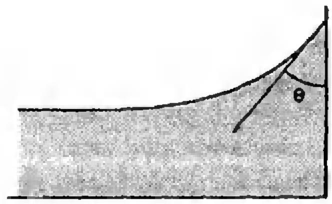


Рис. 9

3. Между объективом фотоаппарата с фокусным расстоянием $F=16$ мм и пленкой установлен желтый светофильтр из стекла толщиной $d=1$ мм и показателем преломления $n=1,5$. Фотоаппарат фокусируют на бесконечность и производят съемку, после чего светофильтр, не меняя положения объектива, убирают. На какое расстояние будет теперь сфокусирован аппарат?

Д.Григорьев

Задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

Санкт-Петербургская математическая олимпиада отмечает в этом году свое 60-летие. О первой такой олимпиаде мы писали во втором номере нашего журнала за нынешний год.

По многолетней традиции, на городской тур олимпиады приглашаются ученики 6—11 классов, успешно выступившие на первом, районном туре (в нем на сей раз участвовали около 10000 учеников; разбор задач районного тура проводился по телевидению). На городском туре в процессе решения задач участники могут рассказать членам жюри свои решения.

Сегодня мы публикуем задачи юбилейной Санкт-Петербургской олимпиады.

6 класс

1. Есть пять монет достоинством 1, 2, 3, 5 и 10 пиастров. Одна из них фальшивая, т.е. ее вес в граммах не равен ее достоинству. Как при помощи чашечных весов без гирь определить фальшивую монету?

Д. Фомин

2. На шахматной доске расставлены ладьи так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали находится ровно одна ладья. Доску разбили на четыре равных квадрата. Докажите, что число ладей в правом верхнем квадрате равно числу ладей в левом нижнем квадрате.

С. Берлов

3. На каждой из одиннадцати карточек написано по цифре, не превосходящей пяти. Расположив эти карточки в ряд, Миша получил одно 11-значное число; затем, расположив те же карточки по-другому, Миша получил второе 11-значное число. Докажите, что сумма двух этих чисел будет содержать хотя бы одну четную цифру в своей десятичной записи.

Р. Семизаров

4. При дворе принца Лимона служили герцоги, графы и бароны. В начале правления принца придворных было 1994, но каждый день один из них убивал другого на дуэли, причем герцоги убивали только графов, графы — только баронов, а бароны — только герцогов. При этом никто не выиграл дуэль дважды. В конце концов остался в живых лишь барон Апельсин. Какой титул был у первого погибшего придворного?

А. Перлин

5. У Кости есть 222 ромба вида ◇, 333 треугольника △ и 444 трапеции вида ⏢, причем все отрезки на рисунках имеют длину 1. Докажите, что Костя не сможет сложить многоугольник периметра 888, использовав при этом все плитки. При складывании стороны фигурок должны точно накладываться друг на друга.

К. Кохась

6. На доске выписано в ряд 101 натуральное число. За один ход разрешается из любых двух соседних чисел вычесть по единице. Известно, что такими операциями можно получить наборы

$$\{1,0,0,\ldots,0,0,0\} \text{ и } \{0,0,0,\ldots,0,0,1\}.$$

Докажите, что из исходного ряда чисел можно получить набор из 101 числа $\{0,0,0\ldots,0,1,0,\ldots0,0,0\}$ (единица на 51-м месте).

А. Перлин

7 класс

1. См. задачу 4 для 6 класса.

2. Три двузначных числа таковы, что сумма любых двух из них равна числу, отличающемуся от третьего лишь порядком цифр. Какой может быть сумма этих трех чисел?

Д. Фомин

3. В клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены 0 и 1, причем известно, что из любых четырех строчек таблицы какие-то две совпадают. Докажите, что в таблице есть два одинаковых столбца.

С. Берлов

4. Есть сто монет достоинством 1, 2, 3, ..., 100 пиастров. Среди них не более 20 фальшивых, т.е. таких, что их вес в граммах не равен их достоинству. Как при помощи чашечных весов без гирь определить, фальшива ли монета достоинством в 10 пиастров?

Д. Фомин, М. Гусаров

5. Могут ли расстояния от некоторой точки на плоскости до вершин некоторого квадрата быть равными 1, 4, 7 и 8?

Д. Фомин

6. В марсианском алфавите k букв, и два слова называются похожими, если в них одинаковое количество букв и они отличаются лишь в одном месте (например, ТРИКС и ТРУКС). Докажите, что все слова в языке можно разбить на k групп, в каждой из которых все слова не похожи друг на друга.

В. Жуховицкий

7. Бумажный квадрат разбит линиями, проведенными карандашом, на n прямоугольников. Докажите, что можно сделать не более $n-1$ прямолинейного разреза, после которых бумажный квадрат распадется в точности на нарисованные прямоугольники. Части нельзя накладывать друг на друга, а разрез не обязан начинаться или кончаться на краю.

С. Иванов

8 класс

1. В треугольнике ABC биссектриса из вершины A, высота из вершины B и

серединный перпендикуляр к стороне AB пересекаются в одной точке. Найдите величину угла A.

С.Иванов

2. См. задачу 4 для 6 класса.

3. Дано 15-значное число, записанное нулями и единицами, которое делится на 81, но не делится на 10. Докажите, что из него нельзя вычеркнуть один из нулей так, чтобы полученное число по-прежнему делилось на 81.

М.Гусаров, С.Берлов

4. Есть сто монет достоинством 1, 2, 3, ..., 100 пиастров. Среди них ровно 16 фальшивых, т.е. таких, что их вес в граммах не равен их достоинству. Как при помощи чашечных весов без гирь найти все фальшивые монеты?

Д.Фомин, С.Берлов

5. Найдите все натуральные числа n, для которых сумма квадратов всех их собственных (т.е. не равных n) делителей равна $2n+2$.

Д.Фомин

6. Тушенка продается в банках пяти типов — они различаются по весу и цене (см. таблицу). На складе имеется 1994 банки общим весом 1 тонна. Докажите, что их общая стоимость меньше 1600000 рублей.

Вес	Цена
330 г	600 р
420 г	700 р
550 г	800 р
640 г	900 р
710 г	1000 р

К.Кохась

7. См. задачу 7 для 7 класса.

9 класс

1. На острове, население которого составляют только рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут, находится НИИ. Каждый из его сотрудников однажды сделал два заявления:

а) В институте нет и десяти человек, которые работают больше меня.

б) По крайней мере сто человек в институте получают зарплату большую, чем моя.

Известно, что нагрузка у всех работников разная, как и зарплата.

Сколько человек работает в НИИ?

Ф.Назаров

2. Натуральные числа p и q таковы, что $p \geq q$. У ослика Иа-Иа есть pq палочек, из которых можно составить p q-угольников. Докажите, что из этих же палочек можно составить q p-угольников.

Ф.Назаров

3. AL — биссектриса треугольника ABC, K — точка на стороне AC такая, что $CK=CL$. Прямая LK и биссектриса угла B пересекаются в точке P. Докажите, что $AP=PL$.

С.Берлов

4. Про натуральные числа a, b, c и d известно, что $\frac{a^2+b}{a+c} = d$. Докажите, что $d \leq b+(c-1)^2$.

С.Берлов

5. Двое играют в игру. Первый игрок загадал число, а второй игрок за ход может назвать любые k различных натуральных чисел, не больших 100, после чего первый сообщает сумму задуманного числа и одного из названных чисел. При каком максимальном k второй может отгадать задуманное число?

С.Берлов, Ф.Назаров

6. Квадрат разбит на несколько прямоугольников так, что любая горизонтальная прямая пересекает ровно n прямоугольников, а любая вертикальная прямая пересекает ровно m прямоугольников (рассматриваются только прямые, не содержащие сторон прямоугольников). Каково минимально возможное число прямоугольников разбиения?

Д.Карпов

7. На сторонах AB, BC, CD и DA произвольного четырехугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M и N соответственно. Обозначим через S_1, S_2, S_3 и S_4 площади треугольников AKN, BKL, CLM и DMN соответственно. Докажите, что

$$\sqrt[3]{S_1}+\sqrt[3]{S_2}+\sqrt[3]{S_3}+\sqrt[3]{S_4} \leq 2\sqrt[3]{S_{ABCD}}.$$

С.Берлов

10 класс

1. В акционерном обществе «Елки-палки» 1994 акционера, причем известно, что любые 1000 из них в совокупности обладают контрольным пакетом (т.е. не менее чем половиной акций). Какую наибольшую долю акций может иметь один акционер?

С.Берлов и др.

2. Назовем треугольник «невысоким», если по крайней мере две его высоты имеют длину, не большую 1. На плоскости даны четыре точки такие, что все образуемые ими треугольники — невысокие. Докажите, что существует прямая, от которой все эти точки удалены на расстояние, не превосходящее $1/2$.

С.Берлов

3. Натуральные числа a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 и c_2 таковы, что

$a_1+a_2=31$, $b_1+b_2=32$, $c_1+c_2=1994$.

Докажите, что произведения $a_1b_1c_1$ и $a_2b_2c_2$ не равны.

А.Перлин

4. На полке стоят 1994 тома энциклопедии. Каждое утро библиотекарь Федя берет три тома и как-то расставляет их на тех же местах, а каждый вечер уборщица Дуся меняет какие-то два тома местами. Докажите, что Дуся может действовать так, что в любой момент времени на своих местах будет стоять менее пяти томов (исходно тома расставлены уборщицей).

Ф.Назаров

5. На сторонах AB, BC и CA произвольного треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Обозначим через S_1, S_2 и S_3 площади треугольников AB_1C_1, BA_1C_1 и CA_1B_1 соответственно. Докажите, что

$$\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3} \leq \frac{3}{2}\sqrt{S_{ABC}}.$$

С.Берлов

6. См. задачу 6 для 9 класса.

7. Двое играют в игру. Первый игрок загадал число, а второй игрок за ход может назвать любые пять различных натуральных чисел, не больших 9, после чего первый сообщает сумму задуманного числа и одной из названных цифр. За какое минимальное число ходов второй может отгадать задуманное число?

С.Берлов

11 класс

1. На стороне AC равностороннего треугольника ABC выбрана точка D, а на стороне AB — точка E так, что $AE=CD$. M — середина отрезка DE. Докажите, что $AM=BD/2$.

С.Берлов

2. См. задачу 1 для 9 класса.

3. Натуральные числа a, b, x и y таковы, что $ax+by$ делится на a^2+b^2. Докажите, что числа x^2+y^2 и a^2+b^2 имеют общий делитель, больший 1.

А.Перлин

4. См. задачу 4 для 10 класса.

5. Точка H — ортоцентр треугольника ABC, а точки H_1 и H_2 — ее проекции на биссектрисы внутреннего и внешнего углов B. Докажите, что прямая H_1H_2 делит сторону AC пополам.

Д.Фомин

6. См. задачу 6 для 9 класса.

7. Дана конечная последовательность чисел a_1, a_2, ..., a_n, $a_1 \geq a_2/2$. Для любого $k<n$ разрешается заменить числа a_1, a_2, ..., a_k на числа $a_{k+1}-a_k$, $a_{k+1}-a_{k-1}$, ..., $a_{k+1}-a_1$ (в указанном порядке). Докажите, что при помощи таких операций можно получить единственную последовательность чисел, в которой каждое число, кроме крайних, не меньше полусуммы своих соседей.

С.Берлов

III Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Со 2 по 8 ноября 1993 года в знаменитом пригороде Санкт-Петербурга — Старом Петергофе проходила ставшая традиционной тест-рейтинговая олимпиада «Интеллектуальный марафон», организованная Московским Интеллект-клубом «Глюон» при участии и поддержке Академической гимназии при СПбГУ, Евразийского физического общества, Департамента образования Москвы и мэрии Санкт-Петербурга, а также ряда других организаций.

Тест-рейтинговая олимпиада «Интеллектуальный марафон» является составной частью программы «Сохранение интеллектуального и творческого потенциала России» Московского интеллект-клуба «Глюон», который ведет поиск и отбор, осуществляет поддержку и социальную защиту интеллектуально одаренных детей.

На олимпиаду съехались 125 школьников, гимназистов, лицеистов, представлявшие 38 команд из различных регионов России, СНГ и Европы. Каждый участвовал как в индивидуальных, так и в командных соревнованиях по английскому языку, физике и математике.

К участникам олимпиады с приветствиями и пожеланиями успехов обратились Департамент образования Москвы и мэрии Санкт-Петербурга, Евразийское физическое общество и Международная школа физики, ректорат Санкт-Петербургского университета и других учебных заведений страны.

В свободное от соревнований время участники олимпиады совершили интересную экскурсию в Большой Санкт-Петербург: автобусная экскурсия по красивому и известному пригороду «Старый Петергоф — Санкт-Петербург», экскурсию по старинному Санкт-Петербургу и, конечно, посетили знаменитый Эрмитаж, где кроме коллекций музея удалось увидеть выставку работ великого Анри Матисса из собраний музеев Европы. По вечерам — традиционные «Вечера знакомств».

Как все хорошее, олимпиада быстро подошла к завершению. Все считали баллы, нормы, коэффициенты, а итог получился такой.

В личном зачете абсолютным победителем стал ученик с.ш. № 57 г. Москвы — Самуил Грушевский, на втором месте — ученик той же школы — Сергей Крупенин.

В командном зачете 1 место заняла команда с.ш. № 57 г. Москвы; на втором месте — Физико-математический лицей № 31 г. Челябинска; на 3-м месте — дружная команда лицея «ФТШ при ФТИ им. А.Ф.Иоффе» (Санкт-Петербург).

Победители и призеры в личном и командном зачетах были награждены ценными призами, подарками, сувенирами.

Традиционно были вручены специальные призы:

— Саше Телесникову (12 лет) как самому юному участнику олимпиады, он представлял городской лицей № 1 г. Черновцы (Украина);

— почетный приз «Мисс Олимпиада 93» получила Елена Слюнко из ФМЛ г. Вятки.

На этой олимпиаде были вручены новые призы: «За самое красивое решение задачи по физике» — книга «Об академике А.Д.Сахарове», подписанная вице-президентом РАН академиком Ж.И.Алферовым, а также приз «За волю к победе».

Организаторы постарались, чтобы все участники уехали с памятными сувенирами и хорошими воспоминаниями.

Очередная IV Международная тест-рейтинговая олимпиада «Интелектуальный марафон» для одаренных детей России, СНГ и Европы состоится в октябре 1994 года. Клуб «Глюон» приглашает центры, школы, гимназии, лицеи принять в ней участие. Заявки об участии просим присылать по адресу: Россия, 115580 Москва, а/я № 10, Московский Интеллект-клуб «Глюон».

Задачи по математике

1. Найдите все четырехзначные числа, являющиеся полными квадратами и такие, что их первые две цифры совпадают и две последние тоже совпадают.

2. Можно ли расставить числа 1, 2, ..., 81 в клетки квадратной таблицы 9×9 так, чтобы суммы чисел во всех горизонтальных рядах были одинаковыми?

3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ со стороной 1 взяты точки M и N такие, что периметр треугольника CMN равен 2. Найдите угол MAN.

4. Решите уравнение

$$\sqrt{x_1-1^2}+2\cdot\sqrt{x_2-2^2}+\ldots+n\cdot\sqrt{x_n-n^2}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{2}.$$

5. В треугольнике ABD угол ABD равен 120°, на стороне AD взята точка C такая, что $AB=CD=1$ и угол ABC равен 90°. Найдите AC.

6. Центральный Банк выпустил в обращение монеты достоинством в 15, 20 и 48 рублей и изъял из обращения все другие деньги.

а) Докажите, что любое целое число рублей можно уплатить этими монетами, быть может, получив сдачу.

б) Докажите, что любую сумму, начиная с некоторого N, можно уплатить и без сдачи, и найдите наименьшее возможное N.

7. Докажите, что число 1280000401 является составным.

8. Пусть $a_1, a_2, \ldots a_n$ — попарно различные натуральные числа. Докажите неравенство

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\ge\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{1+2+\ldots+n}.$$

Задачи по физике

1. Под каким максимальным углом можно бросить тело в однородном поле тяжести Земли, чтобы оно в течение всего времени полета удалялось от точки бросания? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Маленький грузик подвешен на невесомой нити длиной l около гладкой стенки. На расстоянии x под точкой подвеса в стенку вбит гвоздь. Грузик выводят из положения равновесия так, что нить отклоняется на угол $\pi/2$, и отпускают.

а) При каких x грузик после закручивания вокруг гвоздя будет двигаться по окружности?

б) При каких x нить хотя бы раз обернется вокруг гвоздя?

3. Ракета стартует с планеты вертикально вверх со скоростью v, меньшей второй космической. Имеется возможность на короткое время включить дополнительные двигатели. Выберите, когда это лучше сделать, чтобы преодолеть притяжение планеты (атмосфера на планете отсутствует):

а) сразу после отработки основных двигателей;

б) когда скорость ракеты обратится в ноль;

в) безразлично когда, поскольку реактивные силы, действующие между газами, вырывающимися из сопла, и ракетой, являются внутренними для системы ракета – газ.

4. Какой из перечисленных приборов позволяет найти кинетическую энергию молекул воздуха в комнате, где вы находитесь:

а) психрометр;

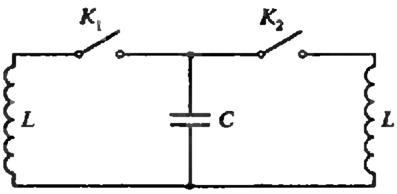
б) термометр;

в) барометр?

Объем комнаты считайте известным, ответ поясните.

5. Известно, что в нашем трехмерном мире электрические заряды располагаются на поверхности проводника. Верно ли это утверждение в плоском, двумерном мире? Иными словами, будут ли располагаться заряженные частицы, взаимодействующие кулоновскими силами, вдоль границы плоского проводника?

6. Конденсатор емкостью C зарядили до заряда Q и подсоединили через ключи K_1 и K_2 к двум одинаковым катушкам индуктивностью L (см. рисунок). Сначала замкнули ключ K_1, а затем, когда ток в первой катушке был равен I_0, замкнули K_2. Определите:



а) максимальные токи через каждую катушку;

б) максимальный заряд конденсатора.

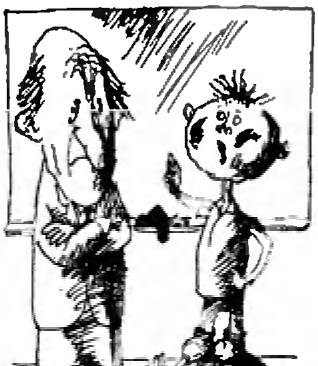
В. Альминдеров, А. Егоров

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

Когда абитурский номер был уже в типографии, мы узнали, что «Мир» с нашими космонавтами больше не летает. Упал где-то в Южной Америке.

Да не бойтесь. Космонавты остались на орбите. Успели выпрыгнуть.

Однажды на лекции



— Мы это определение словами запишем. Ни одной буквы не будет.

— Это очень хороший метод. Он обеспечивает минимальную скорость вычислений.

Книжная полка

Вышли из печати новые книги:

«Промышленные генераторы низкочастотного гудения»

«Недесятичные таблицы умножения» В 3-х томах. Т.2: «135-ичная – 159-ичная системы счисления»

«Закон всемирного тяготения и методы сокращения ущерба, причиняемого им народному хозяйству»

«Неопознанные летающие объекты: принципы полета и способы опознания»

ЗАОЧНАЯ ШКОЛА ПРИ НГУ

При Новосибирском государственном университете работает Заочная школа (ЗШ) для учащихся 9 — 11 классов общеобразовательных школ любого государства, входившего раньше в состав СССР.

В ЗШ пять отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 9 — 11 классов, на биологическое — только учащиеся 10 классов, на экономическое — только учащиеся 11 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки и факультативы, которые работают в школах под руководством учителя. Руководитель кружка набирает и зачисляет в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью. После этого члены кружка считаются учащимися ЗШ.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ и дополнительные материалы. Работы учащихся-заочников проверяются в ЗШ, а работы членов кружка проверяет руководитель (по желанию руководителя часть работ членов кружка может быть проверена и в ЗШ).

Ежегодно часть учащихся 10 — 11 классов (тех, кто будет учиться в этих классах в следующем учебном году) приглашаются в Летнюю школу при НГУ. Здесь они вместе с победителями Всесибирской олимпиады слушают лекции крупных ученых, решают интересные задачи на семинарах, знакомятся с университетом и научно-исследовательскими институтами Академгородка, отдыхают. Во время зимних каникул учащиеся ЗШ из близлежащих областей приглашаются в Зимнюю школу при НГУ.

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо *до 30 сентября* прислать на имя директора ЗШ заявление, оформленное по приведенному здесь образцу.

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Заявление о приеме на математическое или физическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ниже, *не позднее 15 октября*.

Для получения ответа вложите конверт с маркой, с написанным на нем Вашим домашним адресом.

Решение задач запишите в простую ученическую тетрадь в клетку, оставляя поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работу отошлите вместе с заявлением, причем *только простой бандеролью* (тетрадь не перегибайте, не сворачивайте в трубочку; тетрадь должна быть тонкой, так как средства на почтовые расходы в ЗШ ограничены). В тетрадь с решениями вложите листок размером 6×10 см с написанным на нем Вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ). Для поступления в ЗШ достаточно решить две – три задачи.

Сообщение о размере оплаты за обучение Вам будет выслано вместе с проверенным первым заданием. Бесплатное обучение в ЗШ сохраняется для детей-сирот, обучающихся в школах-интернатах и детей из многодетных семей (в которых пять и более детей до 18 лет, находящихся на иждивении родителей).

Наш адрес: 630090 г. Новосибирск-90, ул. Пирогова, 11, Заочная школа при НГУ.

Фамилия, имя, отчество (полностью, печатными буквами)	НЕДЛИН ИГОРЬ ИВАНОВИЧ
Класс, в котором Вы учитесь в своей школе	9 "а"
Отделение ЗШ, на котором Вы желаете учиться (можно указать два отделения)	математическое (математическое и физическое)
Подробный домашний адрес с обязательным указанием индекса почтового отделения	632149 Новосибирская обл., с.Мезениха, ул. Андрианова, д. 28 "а", кв.5

Первое задание по физике

После разбора задач своего класса полезно (и мы Вам рекомендуем) ознакомиться с задачами для других классов, а понравившиеся задачи — попробовать решить.

9 класс

1. На поверхности воды плавает брусок, погруженный на 2/3 своего объема. Для того чтобы он затонул, на него необходимо положить гирю массой не менее одного килограмма. Определите массу бруска.

2. Электрическая цепь, на которую подается постоянное напряжение, состоит из двух параллельно соединенных сопротивлений, подключенных последовательно к третьему. Все сопротивления одинаковы. Во сколько раз изменится напряжение на третьем сопротивлении, если одно из параллельно соединенных сопротивлений сгорит?

3. Концы легкой тонкой резинки в некоторый момент имеют направленные вдоль нее, но в противоположные стороны скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Найдите скорость середины резинки в этот момент.

4. Для того чтобы растопить лед, довести образовавшуюся воду до температуры кипения, а затем испарить ее, потребовалось — при постоянном теплоподводе — 9 минут. Сколько времени таял лед? Удельная теплота плавления льда 80 кал/г, теплота парообразования воды 540 кал/г, теплоемкость воды 1 кал/(г·°С).

10 класс

1. С каким ускорением скользят санки с горки с углом наклона α к горизонту, если их тянут с горизонтальной силой F? Коэффициент трения μ, масса санок m, ускорение свободного падения g.

2. Летящее со скоростью v ядро массой M распадается на два осколка. Осколки летят с одной и той же скоростью $2v$, но один в направлении движения ядра, а другой в противоположном направлении. Определите массы осколков.

3. Концам легкой тонкой резинки сообщили направленные вдоль нее, но в противоположные стороны ускорения $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Найдите ускорение середины резинки.

4. На дне сосуда стоит соединенный с дном пружиной жесткостью k цилиндр сечением S и длиной l, сделанный из материала плотностью ρ (рис.1). Сосуд заливают жидкостью плотностью ρ_0. Нарисуйте график зависимости растяжения пружины x от высоты уровня h.

5. С горы высотой H, имеющей склон,

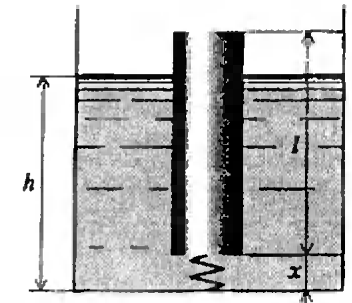


Рис. 1

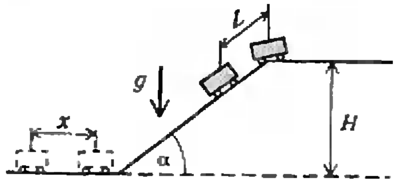


Рис. 2

наклоненный под углом α к горизонту, осторожно сталкивают тележки (рис.2). Очередную тележку сталкивают тогда, когда предыдущая скатилась на расстояние L. Какое расстояние x будет между тележками, когда они спустятся и будут катиться по горизонтальному участку у подножия горы?

11 класс

1. На наклонной плоскости покоится система, состоящая из двух одинаковых брусков массой m каждый, соединенных

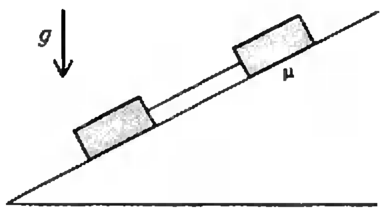


Рис. 3

между собой нитью (рис.3). Угол наклона плоскости начинают постепенно увеличивать до тех пор, пока система не сдвинется с места. Определите в этот момент величину силы натяжения нити. Трения между нижним бруском и плоскостью нет, а коэффициент трения между верхним бруском и плоскостью $\mu = 2$.

2. Решите задачу 2 для 10 класса.

3. Решите задачу 3 для 10 класса.

4. Какая часть воздуха выйдет из сосуда, соединенного небольшим отверстием с атмосферой, если температура в нем изменилась от T_0 до T_1? Температура воздуха в атмосфере T_0.

5. Через параллельно соединенные катушку индуктивностью L и резистор сопротивлением R течет постоянный ток

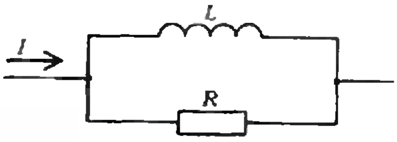


Рис. 4

I (рис.4). Ток быстро выключают. Найдите максимальное напряжение на резисторе и выделившуюся энергию.

6. Два параллельно соединенных конденсатора емкостью C каждый имеют на обкладках общий заряд q. Какую минимальную работу необходимо затратить, чтобы развести обкладки одного конденсатора на большое расстояние?

Первое задание по математике

9 класс

1. Если от трехзначного числа отнять 6, то оно разделится на 7, если отнять 7, то оно разделится на 8, а если отнять 8, то оно разделится на 9. Определите это число.

2. Можно ли расставить все числа от 1 до 16 в клетках квадрата 4×4 так, чтобы суммы по строкам и столбцам давали бы (в некотором порядке) 8 последовательных натуральных чисел?

3. Дан прямоугольный треугольник, в котором a и b — его катеты, r — радиус вписанной окружности, c — гипотенуза. Докажите, что $a + b = c + 2r$.

4. В куче лежат 100 одинаковых настоящих монет и одна фальшивая, отличающаяся от настоящей по весу. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь выяснить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая?

5. Решите уравнение

$$x^3 + [x] = 3,$$

где $[x]$ — целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x (например, $[-3{,}14] = -4$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[5] = 5$).

6. Пусть M — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника BCM, лежит на биссектрисе угла A.

10 класс

1. Докажите неравенство

$$\underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}}}_{1993} + \underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}_{1994} < 5.$$

2. Сколько цифр имеет наименьшее натуральное число, кратное 225, сумма цифр которого равна 225?

3. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x + y, \\ x^4 + y^4 = \frac{1}{2}(x+y)^2. \end{cases}$$

4. Пусть E — середина медианы AD треугольника ABC, F — точка пересечения прямой BE со стороной AC. Найдите площадь четырехугольника $CDEF$, если площадь треугольника ABC равна 1.

5. При каких x выполняется неравенство

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) > \frac{1}{x}?$$

6. Известно, что шесть кругов имеют общую точку. Докажите, что хотя бы один из них содержит центр некоторого другого круга.

11 класс

1. Составим таблицу

1
2 3 4
3 4 5 6 7
4 5 6 7 8 9 10
....

Докажите, что сумма членов каждой горизонтальной строки таблицы равна квадрату нечетного числа.

2. Два пешехода вышли одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Когда первый прошел половину пути до пункта B, второму осталось пройти 24 км до пункта A, а когда второй прошел половину пути до пункта A, первому осталось пройти 15 км до пункта B. Сколько километров останется пройти второму пешеходу в момент, когда первый закончит переход?

3. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = 2.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$$

5. Имеется двое песочных часов. В одних песок пересыпается за 7 минут, в других — за 11 минут. Отмерьте 17 минут, начиная с заданного момента времени (часы в этот момент находятся в исходном положении).

6. Решите задачу 6 для 10 класса.

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Задачи

(см. «Квант» № 3)

1. Если на грибах Лешего было x крапинок, то на мухоморах Бабы-Яги было $13x$ крапинок. Пусть на том мухоморе, который Баба-Яга отдала Лешему, было y крапинок, тогда $13x-y=8(x+y)$. Отсюда $x=9/5y$. Количество мухоморов у Бабы-Яги не больше, чем $13x/y=117/5=23+2/5$. Следовательно, Баба-Яга собрала не больше 23 мухоморов.

2. Коля получил в произведении 16, Вася — 24, Миша — 36, а Степа — 54. Число 54 однозначно раскладывается в произведение из таблицы умножения, поэтому Степа умножал 6 на 9.

3. КУМИР=10247.

4. При подготовке задачи к печати было пропущено одно из условий, а именно, что проведенная прямая не пересекает большей стороны. Без этого условия утверждение становится неверным. Действительно, взяв равнобедренный треугольник с малым углом при вершине, легко построить противоречащий пример (рис.1).

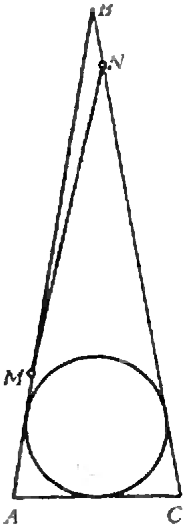


Рис. 1

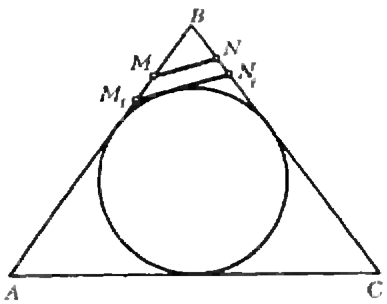


Рис. 2

Доказательство утверждения задачи с учетом указанного условия может быть проведено следующим образом. Пусть прямая MN не пересекает вписанную окружность и большую сторону AC. Проведем отрезок M_1N_1, параллельный MN и касающийся вписанной окружности (рис.2). В силу свойства окружности, вписанной в четырехугольник, получаем, что $AC+M_1N_1=AM_1+CN_1$.

Обозначим длину стороны AC через a, тогда $AB+BC<2a$, а $M_1N>MN>a/2$. В треугольнике M_1BN_1 сумма сторон BM_1+BN_1 больше M_1N_1, т.е. больше $a/2$; с другой стороны, $BM_1+BN_1<2a-AM_1-CN_1=2a-AC-M_1N_1=2a-a-a/2=a/2$. Получили противоречие. Следовательно, прямая MN пересекает окружность, вписанную в треугольник ABC.

5. Если первая цифра этого шестизначного числа равна a, то само число можно записать в виде $100000a+b$, где b — пятизначное число. После перестановки мы получаем число $10b+a$. Если это число вычесть из удесятеренного первого, то получим $999999a=a\cdot 27\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$. Поэтому при делимости первоначального числа на 7, 11, 13 или 37 второе число также делится на соответствующее число.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» № 2)

11. Представим первое число в виде произведения 997 сомножителей: $(1\cdot 1993)\cdot(3\cdot 1991)\cdot\ldots\cdot((1+2k)\cdot(1993-2k))\cdot\ldots\cdot(1991\cdot 1)$. Для каждого сомножителя, кроме двух крайних, выполняется неравенство:

$$(1+2k)\cdot(1993-2k)=1993+2k(1992-2k)>1993.$$

Поэтому первое число больше чем 1993^{997}.

12. Обозначим число, стоящее в центре и входящее во все четыре круга, через x_1, сумму трех чисел, входящих в три круга каждое, через x_2, сумму трех чисел, каждое из которых входит ровно в два круга, обозначим через x_3, сумму оставшихся трех чисел, каждое из которых входит только в один из кругов, обозначим через x_4. Сумма этих чисел равна сумме чисел от 0 до 9, т.е. 45. Запишем это: $x_1+x_2+x_3+x_4=45$. Обозначим сумму чисел в одном круге через A, тогда $x_1+x_2+x_3=A$, а $4x_1+3x_2+2x_3+x_4=4A$. Вычитая из первого уравнения второе, получаем, что $A=45-x_4$. Отсюда следует, что A минимально в том случае, если максимально x_4, наибольшее значение которого 24=9+8+7. Поэтому минимальное значение равно 45 − 24 = =21. Соответствующая расстановка дана на рисунке 3. Минимальное значение для x_4 равно 0+1+2=3, однако получить соответствующую расстановку с суммой 42 не удастся. В самом деле, вычтя из третьего уравнения первое и удвоенное второе уравнения, получим, что $x_1-x_3=2A-45$. Осталось заметить, что x_1 не превосходит 9, поэтому $2A-45-x_3\le 9$. Но x_3 не меньше, чем 3, поэтому $2A\le 51$, следовательно, $A\le 25$. Расположение чисел с суммой 25 изображено на рисунке 4.

13. Обозначим угол BAM и равный ему угол NAC через α,

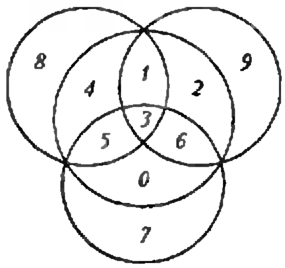


Рис. 3

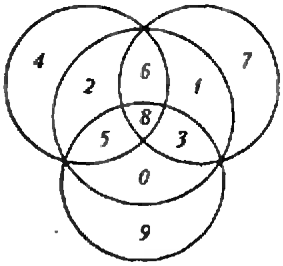


Рис. 4

угол MAN и равный ему угол AMN через β, а угол ABC через γ (рис.5). Из равнобедренного треугольника ABC получаем, что $4\alpha+2\beta+\gamma=180°$, а из треугольника ABM — что $\beta=\alpha+\gamma$. Исключая из этих равенств γ, получаем, что $3(\alpha+\beta)=180°$, следовательно, угол $MAC=\alpha+\beta=60°$.

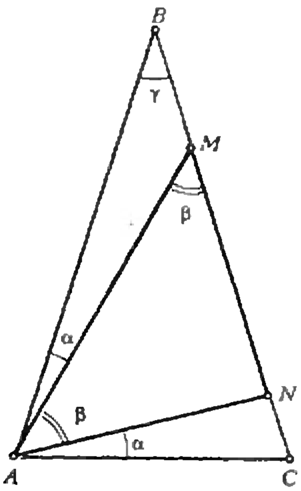


Рис. 5

14. Такими числами являются, в частности, числа вида 999...99, поскольку такое число записывается в виде $10^k - 1$, а его квадрат — в виде $10^{2k} - 2\cdot 10^k + 1 = 999...99800...01$, причем девяток в этой записи ровно $(k-1)$.

15. Соответствующая расстановка изображена на рисунке 6.

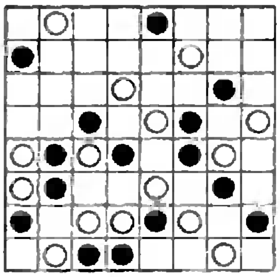


Рис. 6

«Сказка — ложь, да в ней намек...»

1. Трение о ледяную поверхность очень мало, и подняться на обледенелую сопку сложно. 2. При большой скорости вращения сила трения оказалась недостаточной для удержания Смерти на помосте. 3. Хозяин, бросая собаку, получил противоположный импульс, в результате чего лодка и опрокинулась. 4. Любой предмет, предоставленный самому себе, стремится расположиться так, чтобы его потенциальная энергия была минимальной. Центр тяжести обрубка дерева смещен в сторону более тяжелого нижнего конца, поэтому именно этот конец и окажется под водой. 5. Звуковой резонанс. 6. На монетах, побывавших в руках мальчика, торговавшего пончиками, был жир. Когда вор бросил такую монету в воду, жир поднялся вверх, поскольку он имеет плотность меньшую, чем вода, и не растворяется в ней. А круглая форма жировых пятен объясняется действием сил поверхностного натяжения. 7. Шерстинки кота электризовались вследствие трения о кожу руки, и между ними возникали электрические разряды. 8. Температура выдыхаемого воздуха равна приблизительно 36 °С. Когда вокруг холодно, водяной пар, находящийся в выдыхаемом воздухе, охлаждается ниже точки росы и частично конденсируется в виде капелек тумана. Если же температура окружающего воздуха выше точки росы, туман при выдыхании не образуется. 9. Нет, тепловое излучение Солнца поглощается тонким поверхностным слоем воды. 10. Влага, содержащаяся в древесине, при отвердевании увеличивается в объеме и разрывает волокна древесины — дерево потрескивает. 11. Отражение света. 12. Этот вопрос аналогичен вопросу 4. Вода в реке и прутик, находящийся в ней, перемещаются в сторону уменьшения их потенциальной энергии. Положение прутика, при котором нижний, более тяжелый, конец расположен по течению, а верхний, более легкий, смотрит в противоположенную сторону, соответствует наименьшей потенциальной энергии прутика и, следовательно, является наиболее устойчивым.

Геометрическая страничка

1. Проведем через C прямую, параллельную AB, и обозначим через D точку пересечения этой прямой с AA_1. Тогда $CD=CA$ (докажите) и $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA}{CD} = \frac{BA}{AC}$.

2. $\angle BIC = 180° - (\angle IBC + \angle ICB) = 180° - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

3. Пусть $AM = AK = x$. Тогда $BM = AB - x$, $KC = AC - x$. Но $BM + KC = BC$, $AB - x + AC - x = BC$, $x = \frac{1}{2}(AB + AC - BC) = p - a$.

4. $\angle DIB = \angle ABI + \angle BAI = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAC)$,

$\angle DBI = \angle DBC + \angle CBI = \angle DAC + \angle CBI = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC)$.

Значит, $\angle DIB = \angle DBI$ и $DI = DB$.

5. Пусть длина биссектрисы равна x и она делит наш треугольник на два, площади которых S_1 и S_2, S — площадь всего треугольника. Имеем $S_1 + S_2 = S$ или $\frac{1}{2}ax\sin\frac{\alpha}{2} + bx\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$, откуда $x = \frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a+b}$.

6. Воспользуемся для отрезков BK и BM формулой задачи 3. Вычитая соответствующие равенства, найдем $KM = \frac{1}{2}|a-b|$.

7. Указанные окружности пересекаются в центре вписанной в данный треугольник окружности. См. задачу 4.

8. Указанные диагонали являются биссектрисами треугольника ACE.

9. Пусть в треугольника ABC угол A равен 60°. Тогда точки B, C, O, I и H лежат на одной окружности (если ABC — остроугольный треугольник, то $\angle BOC = \angle BIC = \angle BHC = 120°$). В нашем случае углы треугольника OIH будут следующими: $\angle IOH = \angle IHO = 5°$, $\angle OIH = 170°$.

10. Если B и C — острые углы, то $\angle OAC = 90° - \angle B$, $A_1AB = 90° - \angle B$. Это означает, что биссектриса угла A является также и биссектрисой угла OAA_1. Аналогично рассматриваются случаи, когда тупыми являются углы B или C.

11. $\frac{a+b}{c}$. Воспользуйтесь (дважды) теоремой, сформулированной в задаче 1.

12. Докажите, что M — центр вписанной в ABC окружности. (См. задачу 2.)

13. Углы треугольников AKA_1 и AA_1M легко выражаются через углы треугольника ABC. Отсюда получается их подобие. Далее имеем $AA_1^2 = (AB - BA_1)(AC + CA_1) = AB\cdot AC - BA_1\cdot CA_1 + (AB\cdot CA_1 - AC\cdot BA_1)$. Выражение в скобках равно нулю (см. задачу 1).

14. Радиус окружности, проходящей через середины сторон данного треугольника, равен $\frac{R}{2}$, причем он больше r. (Докажите.)

15. Если $\angle BAC = 2\alpha$, то $AI = \frac{R}{\sin\alpha}$, $ID = IB = 2R\sin\alpha$ (см. задачу 4). Значит, $AI\cdot ID = 2Rr$. С другой стороны, $AI\cdot ID = (R-d)(R+d) = R^2 - d^2$.

16. Пусть углы A, B и C равны соответственно α, β и γ, M — точка на дуге AB такая, что $\angle MAB = \varphi$ ($\angle MBA = \gamma - \varphi$). Если I — центр вписанной окружности, а M_1 и M_2 симметричны M относительно AI и BI соответственно, то $\angle M_1AI = \varphi + \frac{\alpha}{2}$, $\angle M_1AB = \varphi + \alpha$, $\angle M_1BI = \gamma - \varphi + \frac{\beta}{2}$, $\angle M_2BA = \gamma - \varphi + \beta$. Таким образом, $\angle M_1AB + \angle M_2BA = \varphi + \alpha + \gamma - \varphi + \beta = 180°$, т.е. M_1A и M_2B параллельны.

17. Обозначим через O центр данной окружности, r — ее радиус, ABC — описанный около нее треугольник, A, B и C — его углы, причем $A \le B \le C$. Тогда A может принимать любые значения, не превосходящие 60°, т.е. $0 < A \le 60°$ и

$OA \ge \frac{r}{\sin 30°} = 2r$. Следовательно, вершина A может быть в любой точке плоскости, исключая внутренность круга с центром в O и радиусом $2r$. Угол B может принимать значения от 0 до 90° ($0 < B < 90°$), т.е. $OB > \frac{r}{\sin 45°} = r\sqrt{2}$. И, наконец, $60° \le c \le 180°$, $r < OC \le 2r$.

18. Обозначим: $PD = 2r$, $AK = AM = x$, $BK = BP = y$, $CM = CP = z$. Имеем $y + z = a$, $yz = 4r^2$. Приравняем друг другу два выражения для площади треугольника ABC ($p = x + y + z = a + x$): $\sqrt{(x+y+z)xyz} = (x+y+z)r$, откуда $4r^2x = (a+x)r^2$, $x = \frac{a}{3}$.

19. Пусть ABC — данный треугольник, R и ρ — радиусы описанной и вписанной окружностей, O_1, O_2, O_3 — центры окруж-

востей радиусами r.

Треугольник $O_1O_2O_3$ подобен ABC, r — радиус описанной около него окружности, $(\rho - r)$ — радиус вписанной. Значит, $\frac{\rho}{R} = \frac{\rho - r}{r}$, откуда $\rho = \frac{Rr}{R-r}$.

20. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей, вписанных в ABC, BCD, CDA и DAB соответственно (рис. 7). Если $\angle BAC = \angle BDC = \alpha$, то $\angle BO_1C = \angle BO_2C = 90° + \frac{\alpha}{2}$ (см. задачу 2). Значит, B, C, O_1 и O_2 лежат на одной окружности и $\angle O_1O_2C = 180° - \angle O_1BC = 180° - \frac{1}{2}\angle ABC$. Аналогично, $\angle O_3O_2C = 180° - \frac{1}{2}\angle ADC$. Из этих равенств следует, что $\angle O_1O_2O_3 = 90°$ (поскольку $\angle ABC + \angle ADC = 180°$).

21. Докажем сначала равенство треугольников, у которых равны по одной стороне, противолежащие равным сторонам углы и биссектрисы этих углов. Рассмотрим два треугольника KLM

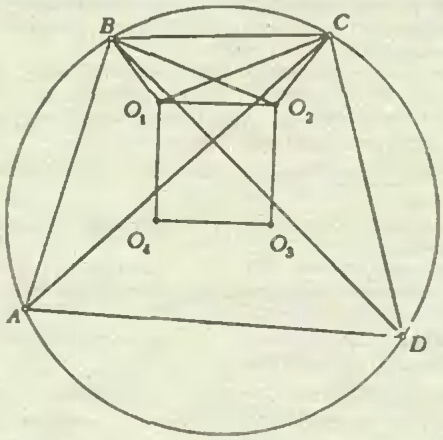


Рис. 7

и KLM_1, у которых $\angle KML = \angle KM_1L$, а также равны биссектрисы этих углов; M и M_1 — с одной стороны от KL. Точки K, L, M и M_1 лежат на одной окружности. Можно считать, что M и M_1 расположены по одну сторону от диаметра PQ, перпендикулярного KL (рис. 8). Пусть M и M_1 не совпадают. Биссектрисы ME и M_1E_1 при продолжении проходят через Q. В ситуации, изображенной на рисунке, имеем $MQ > M_1Q$ и $QE < QE_1$, из этих неравенств следует, что $ME = MQ - QE > M_1Q - QE_1 = M_1E_1$, что противоречит условию.

Вернемся к нашей задаче. Пусть в треугольнике ABC равны биссектрисы $AA_1 = CC_1$ (рис. 9), O — точка их пересечения. Применим к треугольникам ABA_1 и CBC_1 доказанный выше

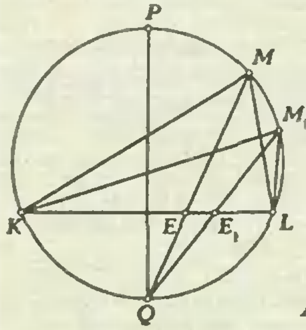


Рис. 8

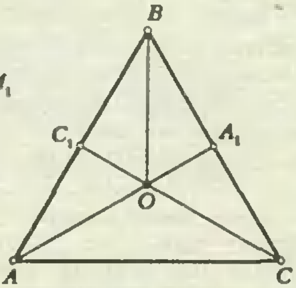


Рис. 9

признак (BO — биссектриса в каждом из них). Получим $AB = BC$, что и требовалось.

Корпускулярные свойства света

1. $h = 6{,}7 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; $A = 1{,}9$ эВ; $\lambda_{max} = 6{,}7 \cdot 10^{-7}$ м.

2. $\varphi_{max} = \frac{1}{e}\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right) = 1{,}74$ В. 3. $F = \frac{E}{c\tau}\frac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{2} = 1$ Н.

Задачи LVII Московской математической олимпиады

8 класс

1. 15. 2. Пусть x, y — эти трехзначные числа. Тогда $1000x + y = 7xy$, откуда $7x - 1$ — делитель 1000, не меньший 700 и потому равный 1000. Отсюда $x = y = 143$.

5. Хорошего времени больше. Отметим на окружности циферблата положения конца часовой стрелки, соответствующие хорошим моментам времени, белым цветом, плохим — черным. Окружность будет разбита на конечное число сегментов, причем точка, диаметрально противоположная черной, будет белой: ровно через 6 часов после плохого момента (когда часовая стрелка лежала между продолжениями двух других — а они через 6 часов будут теми же самыми) наступит хороший.

9 класс

1. Да, см. рисунок 10. (Заметим, что любую из ломаных можно

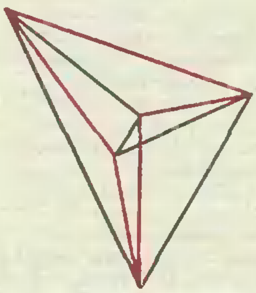


Рис. 10

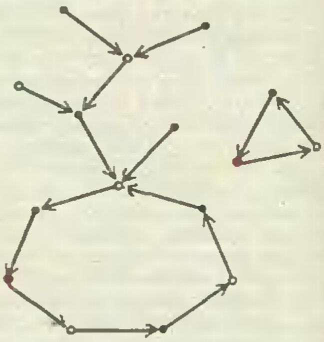


Рис. 11

считать сторонами, а другую — диагоналями пятиугольника.)

2. Если $k > l$, выигрывает Коля: он делит свой отрезок так, чтобы одна из частей была больше двух других и больше l. Если $k < l$, то — Лева: ему достаточно отломать одну часть так, чтобы она была равна большей из частей, на которые разломал свой отрезок Коля, а остальную часть разделить пополам.

3. Подставив $z = -x$, получим уравнение $y^2(y-1) = 2x^2$, которое имеет бесконечно много целочисленных решений (достаточно взять $y = 2k^2 + 1$).

10 класс

1. Ответ: 1666667 и 3333334. Задача решается так же, как задача 2 для 8 класса.

3. Изобразим наших депутатов точками. Проведем стрелку от каждого депутата к им побитому. Получим граф, состоящий из замкнутых циклов и деревьев, корнями которых служат некоторые точки этих циклов (рис. 11). Раскрасим теперь все вершины графа в три цвета так, чтобы соседние (связанные стрелкой) имели разный цвет; для этого достаточно, начав с любого депутата, красить побившего его в другой цвет (третий цвет нужен только, когда окрашивается последний депутат в цикле нечетной длины). Тогда депутатов одного из трех цветов будет не меньше 665.

4. Нужно многократно использовать тот факт, что касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны. Пусть окружности касаются отрезка AD в точках P и Q, стороны BC — в точках M и N (рис. 12). Из равенства отрезков общих внешних касательных между точками касания и равенства касательных, проведенных из точек D и K, получим: $KP=DQ$, $KD=MN$, а затем, используя равенство касательных, проведенных из точки A, получим $2AK=AP+AQ-MN=AB+AC-BC$.

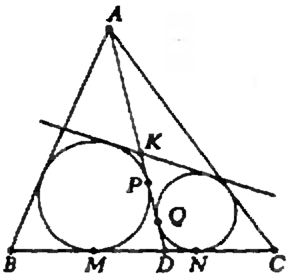


Рис. 12

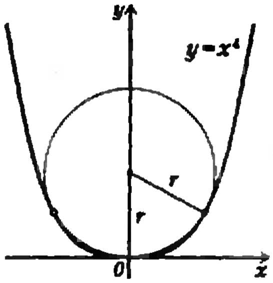


Рис. 13

11 класс

1. Можно отрезать от двух вершин тетраэдра (или от двух соседних вершин куба) два маленьких треугольника.

3. $3\sqrt[3]{2}/4$. Можно найти это значение r как максимальное, при котором уравнения $y=x^4$, $x^2+(y-r)^2=r^2$ имеют общее решение, отличное от $x=y=0$. А можно кроме этих двух уравнений получить третье, используя тот факт, что для критического значения окружность имеет с графиком $y=x^4$ общие касательные (в некоторой точке, отличной от $x=y=0$, см. рис. 13).

Избранные задачи Московской физической олимпиады

Первый тур

9 класс

1. $v=\sqrt{\alpha/M}\,t$. 2. Горки разъезжаются в противоположные стороны с почти одинаковыми скоростями $v=\sqrt{mgH/M}$.
3. $T_1^2/T_2^2=h_1/h_2$.

10 класс

1. Брусок притягивается к стенке с силой $F=(2\sigma^2 l)/(\rho g d^4)$.

2. См. рис. 14: $R=\sqrt{L^2-g^2/\omega^4}$.

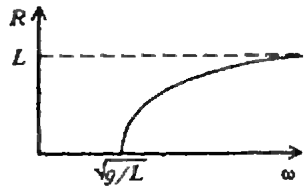


Рис. 14

3. Маятник движется по окружности в плоскости рисунка, имея энергию

$$E=mgl+\frac{mu^2}{2}\varphi\left(\frac{4gl}{u^2}\right),$$

где $\varphi(x)=0$, если x — целое, и $\varphi(x)=1-\{x\}$, если x — нецелое, а $\{x\}$ — его дробная часть.

11 класс

1. $\left(\frac{F_1}{F_2}\right)_{\max}=\frac{16\pi^4 l^2}{T^4 g^2}$.

2. Одно изображение ближе основного, а другое дальше от него на одно и то же расстояние $l=2d/n$, где d — толщина стекла зеркала, а n — его показатель преломления.

Второй тур

9 класс

1. См. таблицу, в которой $t_0=1$ с.

2. $\omega_{\min}<\omega<\omega_{\max}$, где

$$\omega_{\min}=\sqrt{\frac{g\left(\sqrt{h(2R-h)}-\mu(R-h)\right)}{\sqrt{h(2R-h)}\left((R-h)+\mu\sqrt{h(2R-h)}\right)}}\ \text{при}\ \mu<\frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h},$$

$\omega_{\min}=0$ при $\mu\ge\sqrt{h(2R-h)}/(R-h)$,

$$\omega_{\max}=\sqrt{\frac{g\left(\sqrt{h(2R-h)}+\mu(R-h)\right)}{\sqrt{h(2R-h)}\left((R-h)-\mu\sqrt{h(2R-h)}\right)}}\ \text{при}\ \mu<\frac{R-h}{\sqrt{h(2R-h)}},$$

$\omega_{\max}=\infty$ при $\mu\ge(R-h)/\sqrt{h(2R-h)}$.

Таблица

Возможный случай	При каких s возможен	Начальная скорость	Путь, пройденный за вторую секунду
В течение двух секунд камень движется вверх	$s>\frac{3}{2}gt_0^2$	$\frac{s}{t_0}+\frac{gt_0}{2}$	$s-gt_0^2$
Камень поворачивает в течение второй секунды	$\frac{gt_0^2}{2}<s<\frac{3}{2}gt_0^2$	$\frac{s}{t_0}+\frac{gt_0}{2}$	$\frac{5}{4}gt_0^2-2s+\frac{s^2}{gt_0^2}$
Камень поворачивает в течение первой секунды	$\frac{gt_0^2}{4}<s<\frac{gt_0^2}{2}$	$\frac{gt_0+\sqrt{4gs-g^2t_0^2}}{2}$	$\frac{2gt_0^2-\sqrt{4gst_0^2-g^2t_0^4}}{2}$
Камень поворачивает в течение первой секунды	$\frac{gt_0^2}{4}<s<\frac{gt_0^2}{2}$	$\frac{gt_0-\sqrt{4gs-g^2t_0^2}}{2}$	$\frac{2gt_0^2+\sqrt{4gst_0^2-g^2t_0^4}}{2}$

3. $A = m\omega^2\left(L^2 - l^2\right)$.

10 класс

1. $v = \frac{2k+1}{2n}\sqrt{\frac{gL^2}{2H}}$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$

2. $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = -\frac{3\left(2\sqrt{3}-3\right)}{8}\bar{g}$. 3. $\tau_2 = \tau_1\left(d_2/d_1\right)^2 = 11$ суток.

11 класс

1. $f(t) = \frac{1}{\Delta T_0 - (1-k)t}$. 2. $h = \sqrt{\frac{2\sigma(1-\sin\theta)}{\rho g}}$.

3. $a = \frac{F^2}{d(1-1/n)} = 77$ см.

III Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

МАТЕМАТИКА

1. $7744 = 88^2$. 2. Можно. В первом столбце таблицы 9×9 ставим числа (сверху вниз) 1, 2, ... 9, во втором 2, 3, ... 9, 1, в третьем 3, 4, ... 9, 1, 2, ..., в девятом 9, 8, ... 1. Затем ко всем числам второго столбца прибавляем 9, к числам третьего — 18, ..., к числам девятого — 72.

3. 45°. *Указание*. На продолжении BC за точку B возьмем точку N' такую, что $BN' = DN$. Треугольники $N'AM$ и MAN равны, а AM — биссектриса прямого угла $N'AM$.

4. $x_k = 2 \cdot k^2$ при $k = 1, 2 \ldots n$. *Указание*.
$k\sqrt{x-k^2} \le \frac{k^2 + \left(x-k^2\right)}{2} = \frac{x}{2}$, причем равенство возможно лишь при $x - k^2 = k^2$, т.е. при $x = 2k^2$.

5. $\sqrt[3]{2}$. *Указание*. Пусть DK — основание перпендикуляра, опущенного на BC из точки D, $AC = x$, $BD = a$. Тогда $CD = a/2$, треугольники DCK и ABC подобны и $a = 2/x$. Осталось применить теорему косинусов к треугольнику ABD.

6. а) Достаточно заплатить 1 р, получив при этом сдачу: $1 = 2 \cdot 48 - 15 - 4 \cdot 20$.
б) $N = 218$. *Указание*. Рассмотрите последние цифры уплачиваемых сумм и докажите, что $N = 217$ — наибольшая сумма, которую нельзя уплатить имеющимися монетами.

7. *Указание*. Пусть $a = 20$. Поскольку
$a^3 + a^2 + 1 = a^3 - a + a^2 + a + 1 = \left(a^2 + a + 1\right)\left(\left(a^3 + 1\right)\left(a^2 - a\right) + 1\right)$, данное число является составным.

8. Воспользуемся методом индукции. При $n=1$ неравенство, очевидно, справедливо. Пусть $\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{a_1 + \ldots + a_n} \ge \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{1 + 2 + \ldots + n} = \frac{2n+1}{3}$.

Преобразуем разность:

$$\frac{a_1^2 + \ldots + a^2 + a_{n+1}^2}{a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1}} - \frac{2n+3}{3} =$$

$$= \frac{3\left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right) + 3a_{n+1}^2 - (2n+3)(a_1 + \ldots + a_{n+1})}{3\left(a_1 + a_n + \ldots + a_n + a_{n+1}\right)}.$$

Перепишем числитель полученной дроби:

$$A = 3a_{n+1}^2 - (2n+3)a_{n+1} - (2n+3)(a_1 + \ldots + a_n) + 3\left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right).$$

По предположению индукции

$$3\left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right) \ge (2n+1)\left(a_1 + \ldots + a_n\right).$$

Поэтому

$$A \ge 3a_{n+1}^2 - (2n+3)a_{n+1} - 2\left(a_1 + \ldots + a_n\right).$$

Но из условия следует, что $a_n \ge n$ и

$$a_1 + \ldots + a_n \le 1 + 2 + \ldots + a_n = \frac{a_n\left(a_n + 1\right)}{2}.$$

Следовательно,

$$A \ge 3a_{n+1}^2 - \left(2a_n + 3\right)a_{n+1} - a_n\left(a_n + 1\right) = \left(3a_{n+1} + a_n\right)\left(a_{n+1} - a_n - 1\right) \ge 0,$$

так как $a_{n+1} \ge a_n + 1$. Утверждение доказано.

ФИЗИКА

1. $\alpha_{max} = \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2. а) $x \ge 3l/5$; б) $x = l\sqrt{3}\left(2 - \sqrt{3}\right)$.

3. Сразу после отработки основных двигателей.

4. Барометр.

5. Нет, не будут.

6. а) $I_{1max} = I_{2max} = \frac{I_0}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{2LC} - \frac{I_0^2}{4}}$; б) $Q_{max} = \sqrt{Q^2 - I_0^2 LC/2}$.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, А.Т.Калинин, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, А.П.Савин, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Ю.А.Ващенко, В.Н.Власов, Д.А.Крымов, Л.А.Тишков, А.О.Хоменко, П.И.Чернуский, С.А.Шутов

ГЛАВНЫЙ ХУДОЖНИК

С.А.Стулов

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

С.В.Вакуленко, Е.А.Митченко, Е.В.Титова

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Н.И.Лямина

Адрес редакции:

103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», тел. 250-33-54, 251-55-57

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати 142300 г. Чехов Московской области

Заказ № 2879

Непобедимый «Мефисто»

В конце прошлого года в Мюнхене (Германия) прошло 12-е первенство мира среди шахматных микрокомпьютеров. Вообще-то было два чемпионата — один среди программ (дискет) для персональных компьютеров (сокращенно PC), а другой — среди специализированных шахматных машин (шахматных микрокомпьютеров).

Итак, состязание проводилось в двух отдельных группах. Первую группу составляли 28 шахматных программ, записанных на дискетах. Они разыграли чемпионский титул в турнире, по швейцарской системе в девять туров. Во второй группе выступали три команды, представляющие известные фирмы — производители шахматных машин. Каждая из этих команд состояла из четырех шахматных микрокомпьютеров, и игра проходила в два круга. В обоих турнирах электронным шахматистам предоставлялось по два с половиной часа на 60 ходов.

Чемпионом мира, набрав 7,5 очков из девяти, стала программа «Хиаркс» (Англия), ее автор М.Юнайк.

Второе место с 7 очками заняла программа «Кинг» (Голландия), успевшая прославиться своими победами над гроссмейстерами. Ее написал молодой, но уже известный шахматный программист де Конниг. Эту программу использует фирма «Таск» для производства шахматных микрокомпьютеров, но об этом чуть ниже.

«Бронза» досталась программе «Мефисто Гениус» (Англия), автор которой Р.Лэнг более десяти лет снабжает своими программами компьютеры знаменитой фирмы «Мефисто».

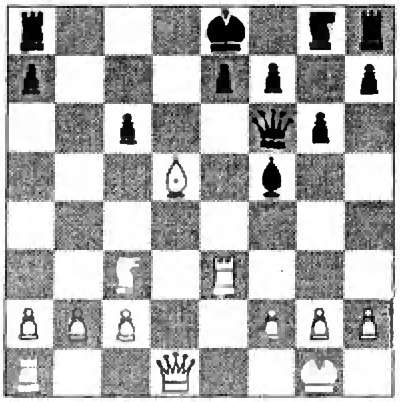
В Мюнхене играли и две программы из России — «Мираж» и «Кентавр». Обе они сделали определенный шаг вперед: если в 1989 и 1991 годах «Кентавр» замкнул турнирную таблицу, а 1992-м наши программы расположились в ее хвосте, то на сей раз они переместились в середину таблицы.

В турнире шахматных микрокомпьютеров борьба шла не между конкретными машинами, а между фирмами, производящими их. В результате победила фирма «Гегенер + Глассер» (Германия), выставившая четыре копии «Мефисто-Гениус», на втором месте «Таск» (Голландия) с компьютерами «Кинг» и на третьем «Сайтек», обитающая в Гонконге, с двумя компьютерами «Спаркс» и двумя «Каспаров-Риск».

Надо сказать, что программа «Мефисто-Гениус» и микрокомпьютер с тем же названием практически не отличаются. Дискета играет на PC с процессором 586, а в машину вмонтирован процессор 486, однако за счет специализированности компьютера скорости перебора вариантов примерно одинаковые.

После того, как были подведены итоги двух чемпионатов, состоялся матч из двух партий на звание абсолютного чемпиона мира — между программой «Хиаркс» и роботом «Мефисто-Гениус». Черными специализированная машина сделала ничью, а белыми выиграла. Таким образом, «Мефисто» в девятый раз подряд завоевал звание чемпиона мира среди шахматных микрокомпьютеров.

Познакомьтесь теперь с двумя эпизодами из чемпионата микрокомпьютеров.



«Таск» — «Сайтек»
Сицилианская защита

1. e4 c5 2. Kf3 Kc6 3. d4 cd 4. K:d4 Kf6 5. Kc3 g6 6. K:c6 bc 7. e5 Kg8 8. Cc4 Cg7 9. Cf4. Согласно старым справочникам, эта позиция «раннего дракона» не слишком приятна для черных: после 9. Фf3 f5 10. Cf4 инициатива на стороне белых. Но, оказывается, немедленный выпад слоном еще сильнее.

9... Фa5 10. 0-0. Жертва пешки вполне корректна, и черным лучше бы было отклонить ее. **10... C:e5 11. C:e5 Ф:e5 12. Лe1 Фf4 13. Лe4 Фf6 14. Лe3.** Грозит 15. Лf3 или 15. Ke4 с разгромом.

14... d5. Как будто защищаясь от обеих угроз, но **15. C:d5! Cf5.**

Взятие слона проигрывает — 15... cd 16. Ф:d5 Лb8 17. Ke4, и 18. Kd6+. Но черные еще держатся: поле e4 вновь под присмотром, а линия «f» перекрыта.

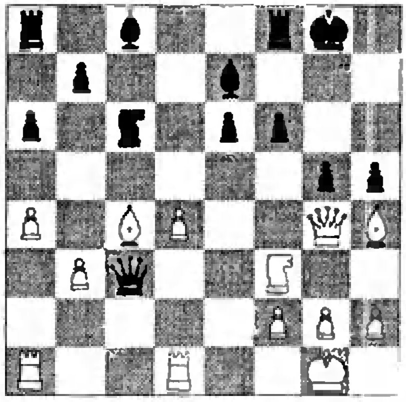
16. Лe6! Классический пример на тему перекрытия. **16... C:e6 17. C:c6+ Kpf8 18. C:a8.** У черных не хватает пешки, но их беды не кончаются. Королевский фланг до конца партии так и останется замороженным.

18... Kh6 19. Cd5 Kf5 20. Ke4 Ф:b2 21. C:e6 fe 22. g4 Kd6 23. K:d6 ed 24. Ф:d6+ Kpf7 25. Фd7+ Kpf6 26. Лe1 Ф:a2 27. Фd4+. Черные сдались.

В свою очередь, один из представителей фирмы «Таск» был сокрушен корифеем компьютерных шахмат.

«Мефисто-Гениус» — «Таск»
Принятый ферзевый гамбит

1. d4 d5 2. Kf3 Kf6 3. c4 dc 4. e3 e6 5. C:c4 a6 6. 0-0 c5 7. a4 Kc6 8. Фe2 cd 9. Лd1 Ce7 10. ed 0-0 11. Kc3 Kd5 12. Ce3 Фd6 13. Cg5 f6 14. Ch4 Kf4 15. Фe4 Фb4 16. b3 Ф:c3 17. Ф:f4 g5 18. Фg4 h5.



Черные пешки двигались вперед слишком азартно, и возмездие не заставило себя ждать.

19. Ф:h5! gh 20. Фg6+ Kph8 21. K:h4. О вечном шахе не может быть и речи, сейчас грозит 22. Kf5! ef 23. Фh6 ×.

21... f5 22. Фh6+ Kpg8 23. C:e6+ C:e6 24. Ф:e6+ Лf7 25. K:f5 Kpf8 26. Фh6+ Kpe8 27. Kg7+ Kpd8 28. d5 Kpc7 29. dc Cc5 30. Ke6+ Kpb6 31. K:c5 Ф:c5 32. Лf1. Черные сдались.

Е.Гик